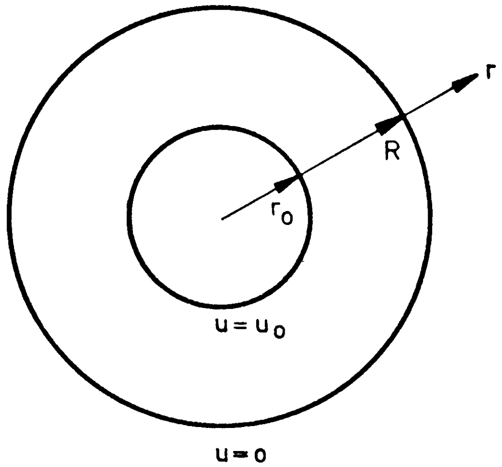
Anwendungsbeispiele für Analogrechner

Beispiel 4 — 15. Oktober 1963

WÄRMELEITUNG

1. Aufgabenstellung

Es soll der Erwärmungsvorgang in einem Kabel untersucht werden. Der Leiter ($r \leq r_0$) wirkt als zylindrische Wärmequelle mit konstanter Temperatur. Die Umhüllung sei zu Anfang kalt. Gefragt ist die Temperaturverteilung im Isoliermaterial in Abhängigkeit von der Zeit und vom Ort (Bild 1).



AH/lt 1064

Bild 1 Querschnitt durch ein Rohr mit zylindrischer Wärmequelle
u = Übertemperatur, r = Radius

2. Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(r) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Randbedingungen:

$$u(r,t) = \begin{cases} u_0 \text{ für } r \leq r_0 \\ 0 \text{ für } r = R \end{cases} \qquad (3)$$

Herausgeber: TELEFUNKEN Aktiengesellschaft · Fachbereich Anlagen Hochfrequenz · Fachgebiet Informationstechnik
Elektronische Rechenanlagen · 775 Konstanz/Bodensee

Anfangsbedingungen: $$u(r,0) = \begin{cases} u_0 \text{ für } r \leq r_0 \\ 0 \text{ für } r > r_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Die Wandstärke des Rohres $R - r_0$ wird in äquidistante Schritte Δr aufgeteilt.

Die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten angenähert: [1], [2]

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r = r_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta r} \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{r = r_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0 + i \Delta r} \qquad (6)$$

Dadurch erhält man aus der partiellen Differentialgleichung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_0 + i \Delta r} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta r} \right] \qquad (7)$$

mit den Anfangswerten

$$u_0 = \text{const.}$$

$$u_i(0) = 0 \text{ für } i = 1, 2 \ldots n \qquad (8)$$

3. Normierung

Mit den normierten Größen

$$U_i = \frac{u_i}{u_{max}} \quad , \quad \tau = \lambda t \tag{9}$$

und der Teilung der Wandstärke in 5 Schritte

$$(R = 5r_0, \Delta r = {}^{r_0}/_2 \; ; \quad i = 1, 2 \ldots 8)$$

ergibt sich die Maschinengleichung:

$$\frac{dU_i}{d} = \frac{a_i}{\lambda \cdot (\Delta r)^2} \left[U_{i+1} \left(1 + \frac{1}{2(2+i)}\right) - 2U_i + U_{i-1} \left(1 - \frac{1}{2(2+i)}\right) \right] \tag{10}$$

Unter der Voraussetzung konstanter Werte $a_i = a$ setzt man den Zeitmaßstab am zweckmäßigsten so fest, daß der Faktor $\frac{a}{\lambda . (\Delta r)^2} = 0{,}5$ wird.

Dadurch werden Potentiometer gespart. Die Konstante a könnte aber auch ebensogut eine Funktion des Ortes sein.

Das Gleichungssystem lautet nun:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 1 \\
\dot{U}_1 &= {}^7/_{12}\, U_2 - U_1 + {}^5/_{12}\, U_0 \\
-\dot{U}_2 &= -{}^9/_{16}\, U_3 + U_2 - {}^7/_{16}\, U_1 \\
\dot{U}_3 &= {}^{11}/_{20}\, U_4 - U_3 + {}^9/_{20}\, U_2 \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Beispiel 4

$$\dot{U}_7 = {}^{19}/_{36}\, U_8 - U_7 + {}^{17}/_{36}\, U_6$$

$$-\dot{U}_8 = 0$$

$$\dot{U}_i = \frac{dU_i}{d\tau}$$

4. Rechenschaltung

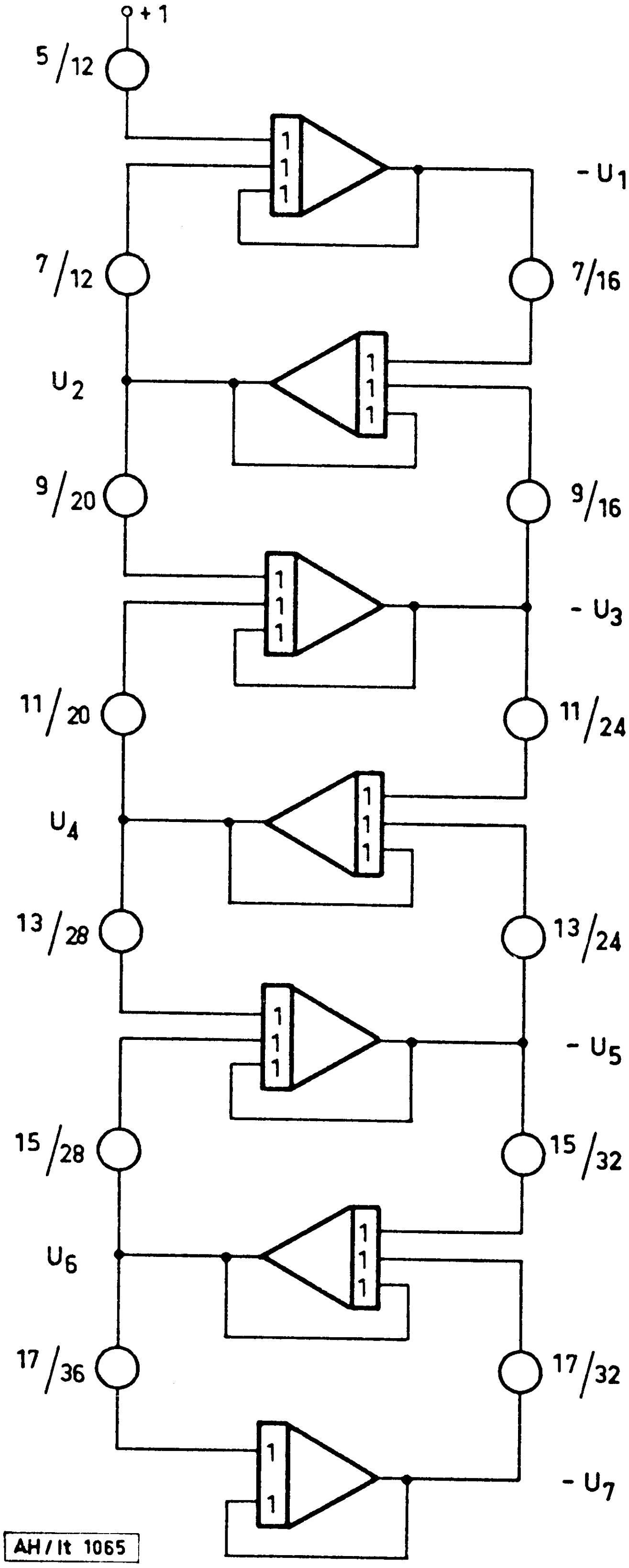
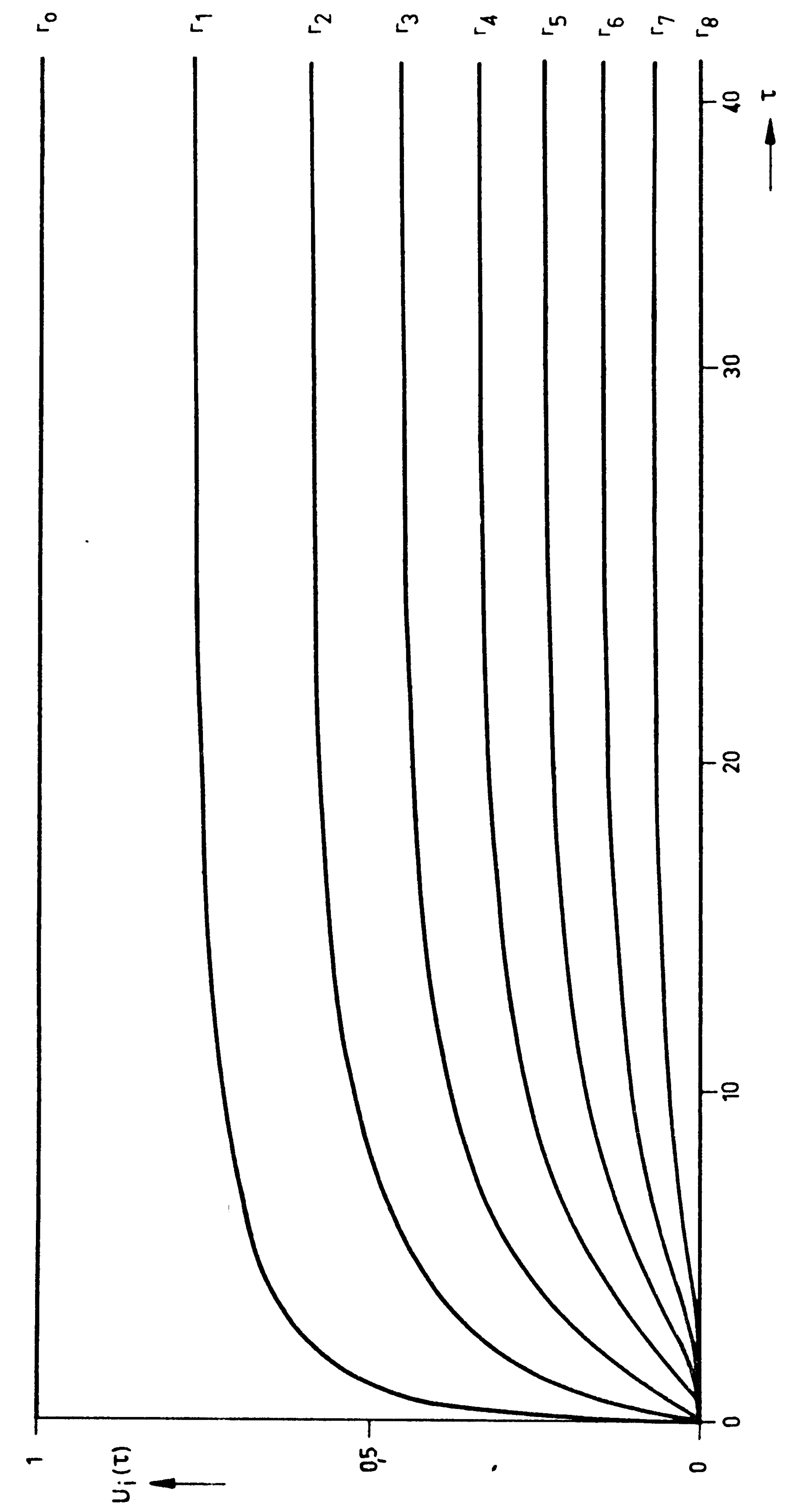


Bild 2 Rechenschaltung zur Lösung
des Gleichungssystems Gl. (11)

Beispiel 4

5. Ergebnisse



AH/It 1066

Bild 3 Zeitlicher Verlauf der Temperatur an den Stellen r_0 bis r_8

Beispiel 4

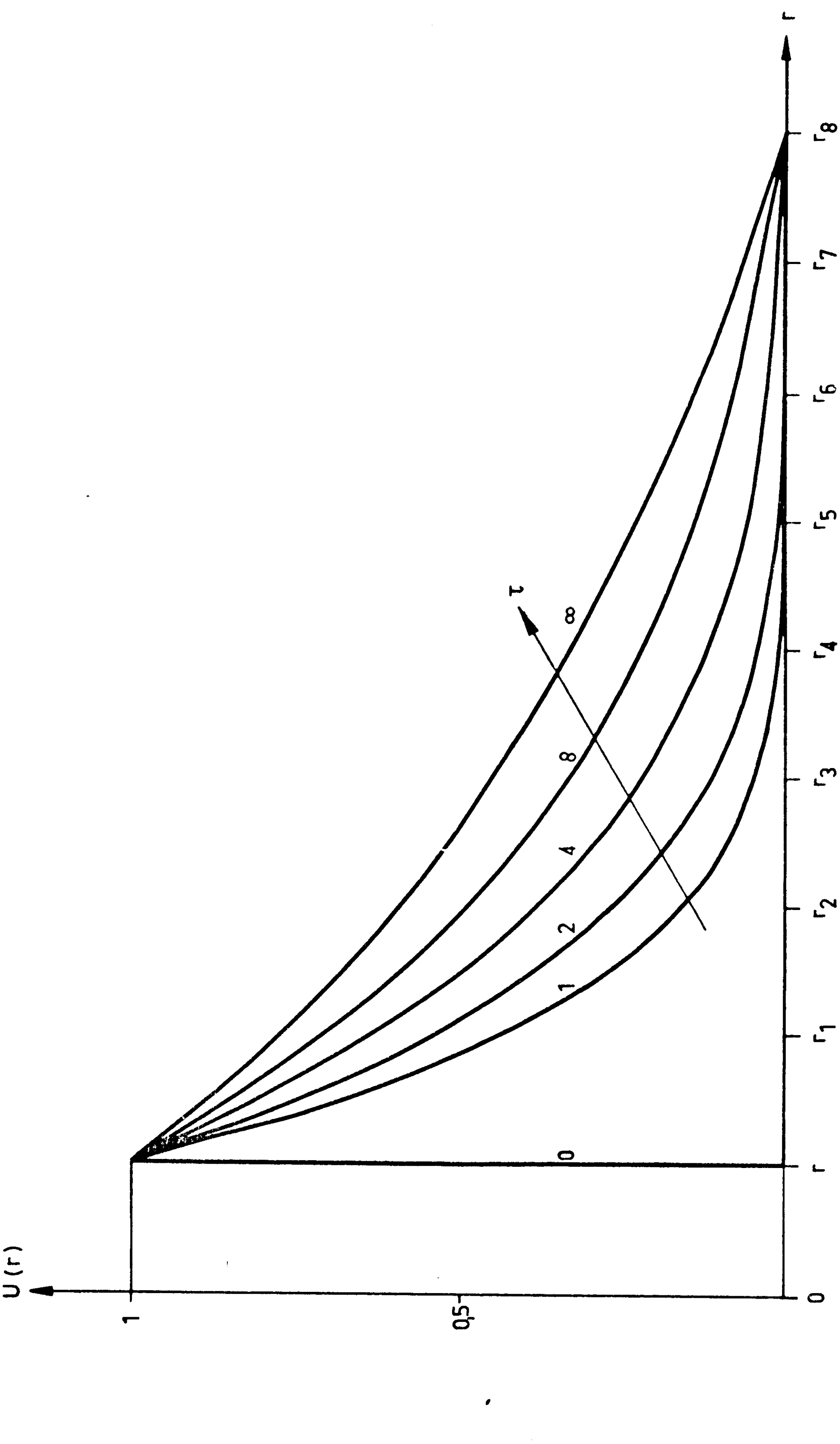


Bild 4 Örtlicher Verlauf der Temperatur zu bestimmten Zeiten
$\tau = 0$ bis $\tau = \infty$

AH / lt 1067

Aus den Funktionen $U_i(\tau)$ mit r_i als Parameter (Bild 3) kann man die Funktion $U_k(r)$ mit τ als Parameter graphisch ermitteln (Bild 4).

Literatur:

[1] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag 1951

[2] W. Giloi und R. Lauber, Analogrechnen, Springer-Verlag 1963