

Anwendungsbeispiele für Analogrechner

Beispiel 4

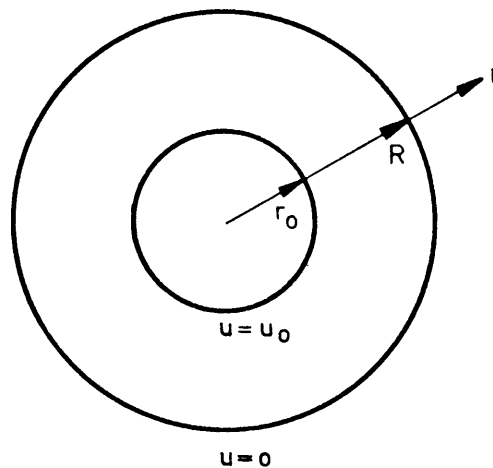


15. Oktober 1963

WÄRMELEITUNG

1. Aufgabenstellung

Es soll der Erwärmungsvorgang in einem Kabel untersucht werden. Der Leiter ($r \leq r_0$) wirkt als zylindrische Wärmequelle mit konstanter Temperatur. Die Umhüllung sei zu Anfang kalt. Gefragt ist die Temperaturverteilung im Isoliermaterial in Abhängigkeit von der Zeit und vom Ort (Bild 1).



AH/It 1064

Bild 1 Querschnitt durch ein Rohr mit zylindrischer Wärmequelle
 u = Übertemperatur, r = Radius

2. Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(r) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

Randbedingungen:

$$u(r, t) = \begin{cases} u_0 & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r = R \end{cases} \quad (3)$$



Anfangsbedingungen:
$$u(r,0) = \begin{cases} u_0 & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases} \quad (3)$$

Die Wandstärke des Rohres $R - r_0$ wird in äquidistante Schritte Δr aufgeteilt.

Die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten angenähert: [1], [2]

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta r} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=r_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0 + i \Delta r} \quad (6)$$

Dadurch erhält man aus der partiellen Differentialgleichung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_0 + i \Delta r} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta r} \right] \quad (7)$$

mit den Anfangswerten

$$u_0 = \text{const.}$$

$$u_i(0) = 0 \text{ für } i = 1, 2 \dots n \quad (8)$$

3. Normierung

Mit den normierten Größen

$$U_i = \frac{u_i}{u_{\max}} \quad , \quad \tau = \lambda t \quad (9)$$

und der Teilung der Wandstärke in 5 Schritte

$$(R = 5r_0, \Delta r = r_0/2 ; i = 1, 2 \dots 8)$$

ergibt sich die Maschinengleichung:

$$\frac{dU_i}{d\tau} = \frac{a_i}{\lambda \cdot (\Delta r)^2} \left[U_{i+1} \left(1 + \frac{1}{2(2+i)} \right) - 2U_i + U_{i-1} \left(1 - \frac{1}{2(2+i)} \right) \right] \quad (10)$$

Unter der Voraussetzung konstanter Werte $a_i = a$ setzt man den Zeitmaßstab τ zweckmäßigsten so fest, daß der Faktor $\frac{a}{\lambda \cdot (\Delta r)^2} = 0,5$ wird.

Dadurch werden Potentiometer gespart. Die Konstante a könnte aber auch ebensogut eine Funktion des Ortes sein.

Das Gleichungssystem lautet nun:

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 \\ \dot{U}_1 &= 7/12 U_2 - U_1 + 5/12 U_0 \\ -\dot{U}_2 &= -9/16 U_3 + U_2 - 7/16 U_1 \\ \dot{U}_3 &= 11/20 U_4 - U_3 + 9/20 U_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11)$$

Beispiel 4

$$\dot{U}_7 = \frac{19}{36} U_8 - U_7 + \frac{17}{36} U_6$$

$$-\dot{U}_8 = 0$$

$$\dot{U}_i = \frac{dU_i}{d\tau}$$

4. Rechenschaltung

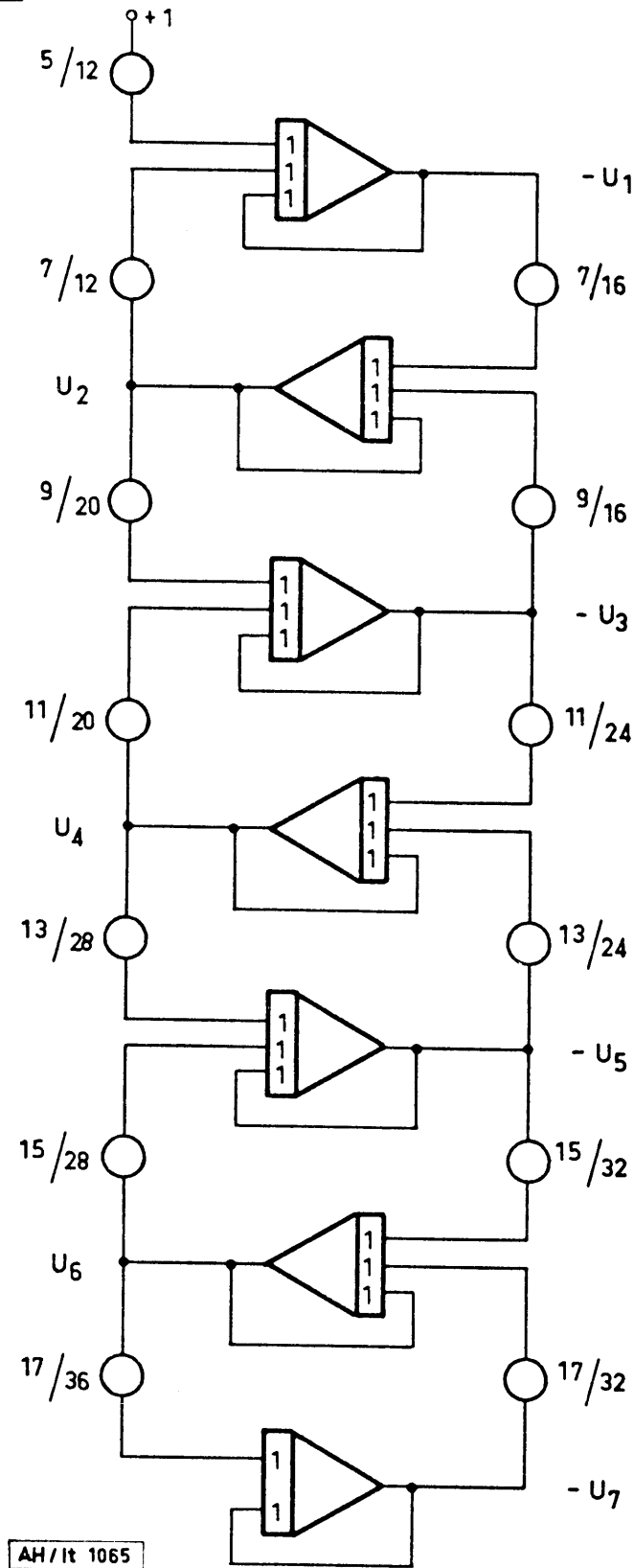
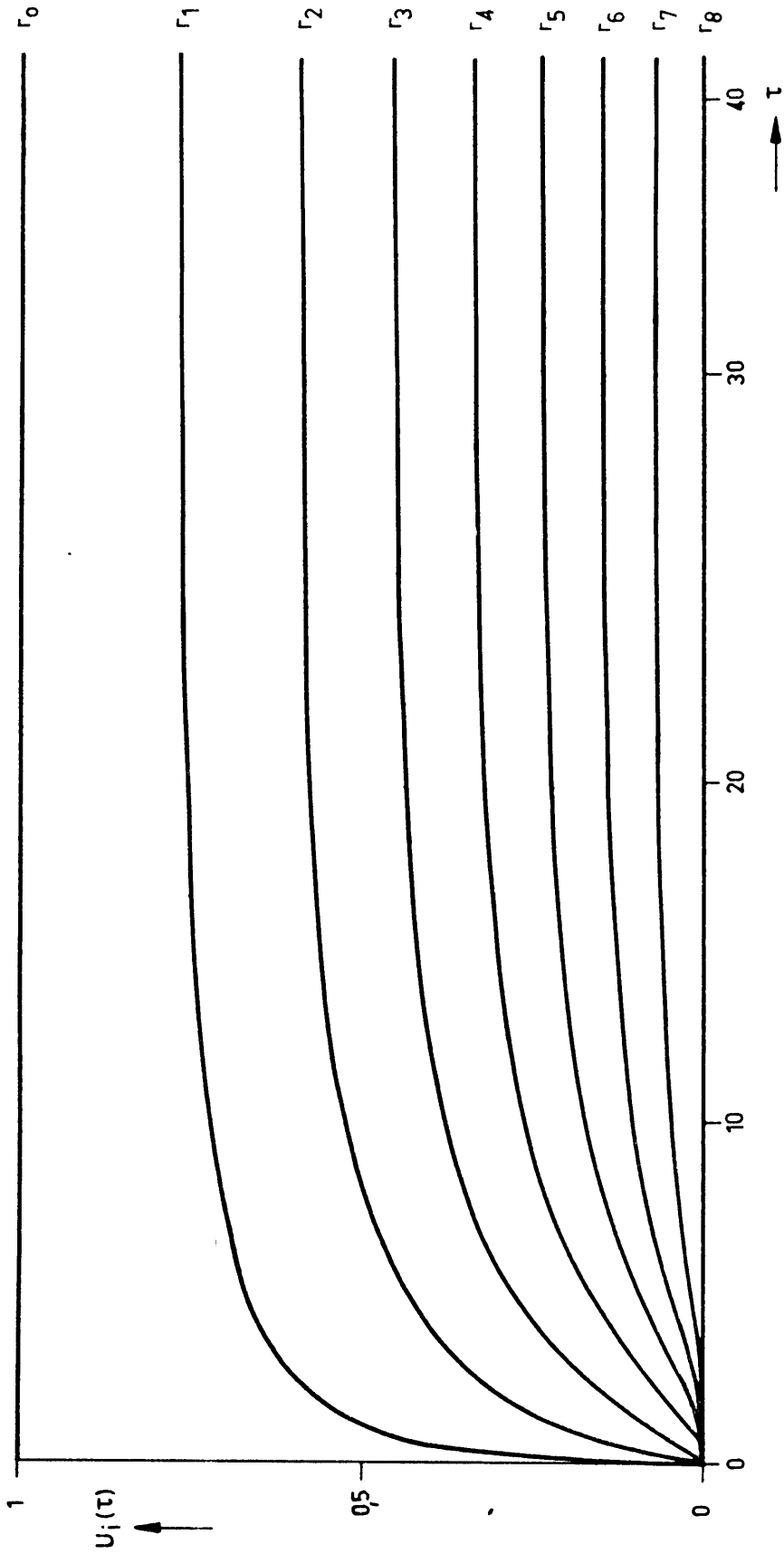


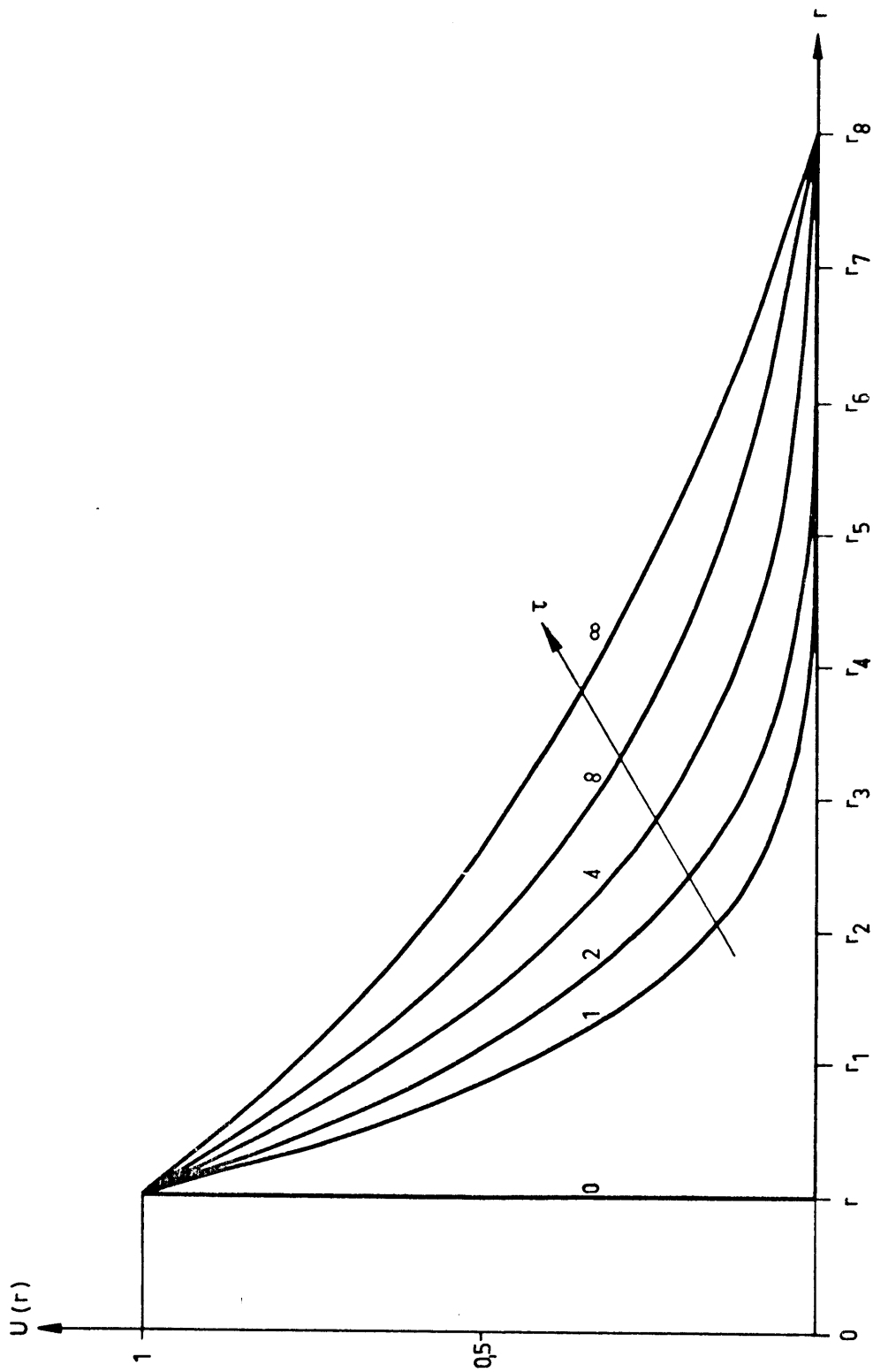
Bild 2 Rechenschaltung zur Lösung des Gleichungssystems Gl. (11)

5. Ergebnisse



AH/It 1066

Bild 3 Zeitlicher Verlauf der Temperatur an den Stellen r_0 bis r_8



Beispiel 4

AH/It 1067

Bild 4 Örtlicher Verlauf der Temperatur zu bestimmten Zeiten
 $\tau = 0$ bis $\tau = \infty$

Aus den Funktionen $U_i(\tau)$ mit r_i als Parameter (Bild 3) kann man die Funktion $U_k(r)$ mit τ als Parameter graphisch ermitteln (Bild 4).

Literatur:

- [1] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen,
Springer-Verlag 1951
- [2] W. Giloi und R. Lauber, Analogrechnen,
Springer-Verlag 1963