

AEG



DATENVERARBEITUNG

H. Kramer

**Simulation von
Schwingungssystemen
mit Analogrechnern**

Beitrag aus dem Lehrgang:
**Theoretische und praktische Einführung
in das Bearbeiten
von Regelungs- und Schwingungsproblemen
mit industriellen und selbstgebauten
Analogrechnern.**
VDI - Bildungswerk, Düsseldorf 1969

Herr Oberbaurat Dr. rer. nat. H. Kramer
ist Dozent an der
Staatlichen Ingenieurschule Konstanz

INHALT

	Seite
I. Einführende Behandlung von Schwingungsaufgaben	3
1. Einleitung	3
2. Qualitative Nachbildung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Einläufiger Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger	3
3. Quantitative Nachbildung der Schwingungsdifferentialgleichung	5
3.1. Normierung der unabhängigen Variablen - Zeitnormierung	5
3.2. Normierung der abhängigen Variablen - Amplitudennormierung	6
4. Abschätzung von Maximalwerten	7
4.1. Erregung durch Anfangswerte	7
4.2. Erregung durch eine Sprungfunktion	8
4.3. Erregung durch eine periodische Störung	9
5. Erzeugung ungedämpfter Schwingungen	10
II. Nichtlineare und kontinuierliche Systeme mit Lösungen	12
1. Nichtlineare einläufige Schwinger	12
1.1. Mathematisches Pendel bei kleinen und großen Ausschlägen	12
1.2. Schwinger mit nichtlinearer Dämpfung	15
1.3. Bistabiler Schwinger	16
2. Mehrläufige Schwinger	17
2.1. Zwei-Massen-System mit nichtlinearem Dämpfer	17
3. Schwingungen kontinuierlicher Systeme	19
3.1. Schwingungen eines vorspringenden Trägers	19
Literatur	21

1. Einleitung

Aufgaben der Schwingungslehre führen in der mathematischen Beschreibung stets auf eine oder mehrere Differentialgleichungen 2. Ordnung. Der Vorteil des Analogrechners, in einfacher Weise Differentialgleichungen lösen zu können, prädestiniert ihn auch zum universellen Hilfsmittel bei der Analyse von Schwingungsproblemen. Insbesondere bei der Behandlung von nichtlinearen Schwingungsaufgaben ist er heute unentbehrlich geworden. Zunächst sollen deshalb die vorbereitenden Arbeiten zur Nachbildung einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit dem Analogrechner skizziert werden.

2. Qualitative Nachbildung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Einläufiger Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger

Ein schwingungsfähiges System sei nach Bild 1 durch eine Masse m , eine Feder mit der Federkonstanten c und einen geschwindigkeitsproportional wirkenden Dämpfer (z. B. Flüssigkeitsreibung auf der Unterlage) mit der Dämpfungskonstanten d gegeben. Wird die Masse m zum Zeitpunkt $t = 0$ um $x(0) = x_0$ aus der Ruhelage ($x = 0$) gebracht, führt die Masse periodische Schwingungen um die Ruhelage aus.

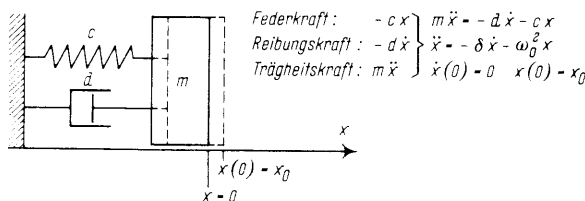


Bild 1. Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger

Die an m angreifenden Kräfte

Federkraft : $- c x$

Reibungskraft: $- d \dot{x}$

stehen zu jeder Zeit mit der

Trägheitskraft: $m \ddot{x}$

im Gleichgewicht. Die Ableitung nach der Zeit $\frac{d(\)}{dt}$ ist hier und später durch $(\dot{\) }$ gekennzeichnet.

Die Kraftgleichung

$$m \ddot{x} = - d \dot{x} - c x$$

mit den Anfangswerten

$$\dot{x}(0) = 0; \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

beschreibt somit den zeitlichen Verlauf der schwingenden Masse.

Die Gleichung (1) ist nun mit geeigneten Elementen des Analogrechners (Bild 2) in eine Rechenschaltung umzuwandeln. Hierzu löst man sie nach ihrer höchsten Ableitung auf und erhält so die Normalform der Schwingungsgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} = - \delta \dot{x} - \omega_0^2 x \tag{2}$$

mit $\delta = \frac{d}{m}$ (Dämpfungsfaktor) und $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (Eigenfrequenz).

Nimmt man \ddot{x} als bekannt an, erhält man jeweils mit einem Integrierer $-\dot{x}$ und x (Bild 3). Danach wird das angenommene \ddot{x} am Eingang des 1. Integrierers durch die nachgebildeten Glieder

$-\delta \dot{x}$ und $\omega_0^2 x$ entsprechend der Gleichung (2) erfüllt. Die Anfangswerte $\dot{x}(0)$ und $x(0)$ sind dem 1. und 2. Integrierer unter Berücksichtigung der Vorzeichenumkehr der Elemente einzugeben.

Der so gewonnenen qualitativen Rechenschaltung sind die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und die Elongation $x(t)$ zu entnehmen. Soll ebenfalls die Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ auftreten, kann sie mit einem zusätzlichen Summierer aus den Gliedern mit \dot{x} und x gebildet werden.

Bezeichnung	Schaltung	Symbol	Rechenoperation
Potentiometer			$A = \alpha \cdot E$ $0 \leq \alpha \leq 1$
			$A = E_1 + \alpha(E_2 - E_1)$ $0 \leq \alpha \leq 1$
offener Verstärker			$A = -V \cdot E$ $V \sim 10^6$
Umkehren			$A = -E$
Summieren			$A = -\sum_i C_i E_i$ $C_i: 1; 10$
Integrieren			$P: A = -E_0$ $R: A(\tau) = -\int_0^\tau C_i E_i d\tau - E_0$ $H: A = A(\tau)$ $C_i: 1; 10$ $\tau = k t^*$
Funktionsgeber			$A = f(E)$
Multiplizieren			$A = E_1 \cdot E_2 - E_0$
Komparator			$A = E_1 (S_1 + S_2 > 0)$ $A = E_2 (S_1 + S_2 \leq 0)$

Bild 2. Rechenelemente des Analogrechners

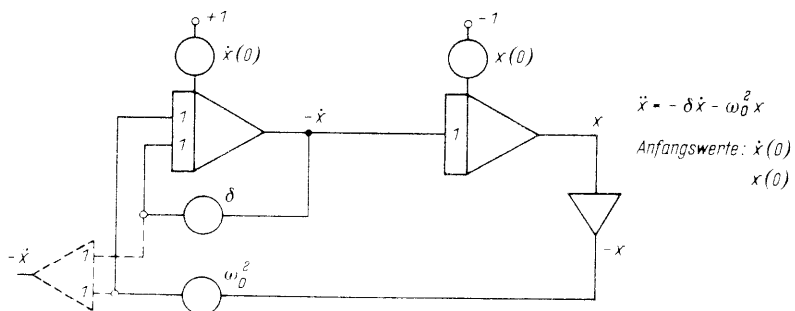


Bild 3. Qualitative Rechenschaltung des gedämpften Schwingers

3. Quantitative Nachbildung der Schwingungsdifferentialgleichung

Das System nach Bild 1 soll folgende Werte haben:

$$m = 1 \text{ kps}^2/\text{cm}; b = 0,2 \text{ kps}/\text{cm}; c = 0,81 \text{ kp}/\text{cm};$$

$$x(0) = 1 \text{ cm}; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Man erhält damit die quantitative Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -0,2 \text{ s}^{-1} \dot{x} - 0,81 \text{ s}^{-2} x$$

mit $x(0) = 1 \text{ cm};$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Die Zahlenwerte für $\delta (= 0,2)$, $\omega_0^2 (= 0,81)$, $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = 1$ sind an den Potentiometern der Rechenschaltung im Bild 3 ohne weiteres einzustellen. Der Rechner liefert sogleich die gesuchten Funktionen $\dot{x}(t)$ und $x(t)$.

In vielen Fällen werden jedoch die Zahlenwerte der Systemparameter nicht einstellbar sein. Deshalb sind im allgemeinen die beiden nachfolgenden Normierungsoperationen durchzuführen.

3.1 Normierung der unabhängigen Variablen - Zeitnormierung

Die Konstanten des nachzubildenden Systems, das heißt die Faktoren der Differentialgleichung, können außerhalb des am Rechner sinnvoll erfüllbaren Bereichs von 0,01 bis 1 liegen. Unter Berücksichtigung der Eingangsfaktoren "10" der Integrierer kann dieser Bereich von 0,01 bis 10 ausgedehnt werden.

z.B. mit den Werten:

$$m = 1 \text{ kps}^2/\text{cm}; d = 2 \text{ kps}/\text{cm}; c = 81 \text{ kp}/\text{cm}$$

$$\dot{x}(0) = 0; \quad x(0) = 1 \text{ cm}$$

erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -2 \text{ s}^{-1} \dot{x} - 81 \text{ s}^{-2} x, \quad x(0) = 1 \text{ cm}$$

Der Zahlenwert für $\omega_0^2 (= 81)$ ist mit einem Potentiometer nicht mehr zu verwirklichen.

Derartige Vorgänge laufen scheinbar zu schnell ($\omega_0 > 1 \text{ s}^{-1}$) für eine Nachbildung mit dem Analogrechner ab. Gleichungen dieser Art können jedoch durch eine Maßstabsänderung der unabhängigen Variablen des Problems, der Problemzeit t , für den Analogrechner aufbereitet werden. Man führt dazu nach:

$$\tau = \lambda \cdot t \quad \lambda: \text{Transformationsfaktor} \quad (3)$$

eine dimensionsfreie Variable τ (Maschinenvariable) ein.

Nach Bild 4 entsprechen

$\lambda > 1 \text{ s}^{-1}$: einer Maßstabsdehnung (Zeitdehnung),

$\lambda < 1 \text{ s}^{-1}$: einer Maßstabsverkürzung (Zeitraffung).

$$\frac{d}{dt} = \lambda \frac{d}{d\tau}$$

$$(\cdot)' = \lambda (\cdot)'$$

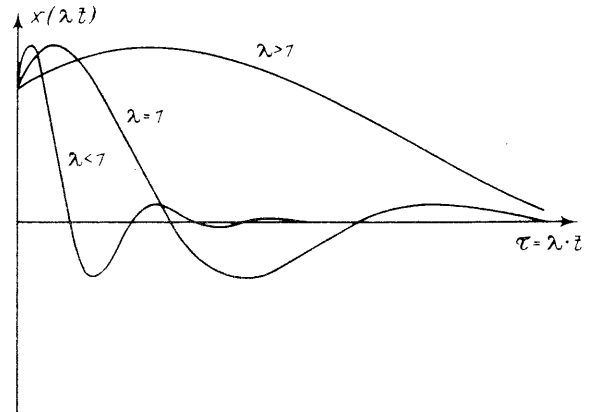


Bild 4. Zeitnormierte Funktion

Mit $\tau = \lambda t$ ergibt sich aus der Schwingungsgleichung (2), indem durch λ^2 dividiert und die Abkürzung $\frac{d(\cdot)}{d(\lambda t)} = \frac{d(\cdot)}{d\tau} = (\cdot)'$ verwendet wird, die Gleichung

$$x'' = -\frac{\delta}{\lambda} x' - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2} x \quad \text{mit den Anfangswerten} \quad (4)$$

$$x'(0) = \frac{\dot{x}_0}{\lambda}; \quad x(0) = x_0$$

Durch eine geeignete Wahl von λ lassen sich nun die Koeffizienten dieser Differentialgleichung in den Arbeitsbereich der Potentiometer bringen. Im allgemeinen ist

$$\lambda \approx \omega_0$$

zu setzen, wodurch der Koeffizient von x in die Größenordnung von 1 kommt.

z.B. Aus der Differentialgleichung des vorherigen

Beispiels liest man ab: $\lambda \approx \omega_0 = \sqrt{81 \text{ s}^{-2}} = 9 \text{ s}^{-1}$. Man setzt nun $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$, also gleich einer Zehnerpotenz, um einfacher umrechnen zu können und aus später noch beschriebenen Gründen. Die transformierte Gleichung lautet somit

$$x'' = -0,2 x' - 0,81 x$$

mit $x'(0) = \frac{\dot{x}(0)}{\lambda} = 0; \quad x(0) = 1 \text{ cm}.$

Das transformierte System ist so am Analogrechner einstellbar geworden.

Das Integrierelement (Bild 2) erlaubt nun, über den in Stufen wählbaren k -Faktor (z. B. 1 s^{-1} oder 10 s^{-1} durch Änderung der Rückführungskapazität) den Zeitablauf an der Maschine, die Maschinenzeit t^* , zu beeinflussen. Es gilt

$$\tau = k t^* \quad (5)$$

Für $k = 1 \text{ s}^{-1}$ ist somit die Maschinenvariable τ mit der Maschinenzeit t^* zahlenmäßig gleich.

Aus den Gleichungen (3) und (5) läßt sich die Maschinenvariable eliminieren. Es ergibt sich dann zwischen der Problemzeit t und der Maschinenzeit t^* die Beziehung

$$t^* = \frac{\lambda}{k} t \quad (6)$$

Wird also im letzten Beispiel $k = \lambda = 10 \text{ s}^{-1}$ gewählt, das heißt werden alle Integrierer mit diesem k-Faktor gesteckt, läuft der Schwingungsvorgang in "Echtzeit" an der Maschine ab.

Da aber nur k-Werte von 1, 10, häufig auch 10^2 und 10^3 am Analogrechner verwirklicht sind, können nur Systeme, die unter Zeitdehnung ($\lambda > 1 \text{ s}^{-1}$) und Wahl einer Zehnerpotenz transformiert wurden, durch nachträgliche Erfüllung der

Echzeitbedingung: $k = \lambda$

in Problemzeit am Analogrechner wiedergegeben werden.

Das Bild 5 zeigt die zeitnormierte Rechenschaltung aus dem Bild 3 in Echtzeitdarstellung.

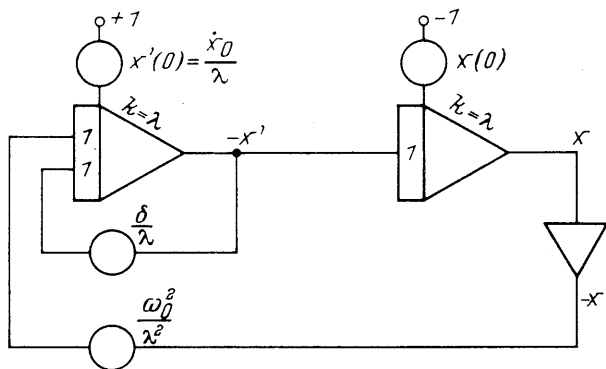
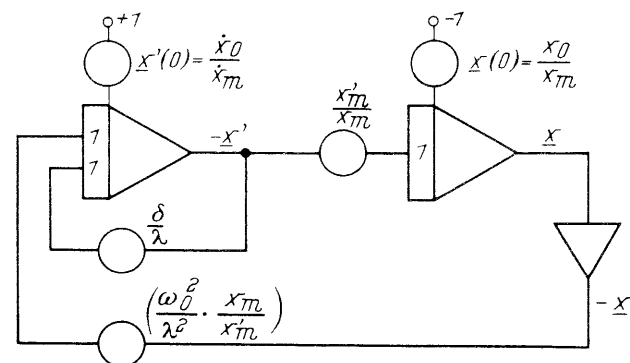


Bild 5. Zeitnormierte Rechenschaltung des gedämpften Schwingers

3.2 Normierung der abhängigen Variablen - Amplitudennormierung

Liegen für die Anfangswerte einer Differentialgleichung zu große Werte vor, überschreiten die Rechengrößen den durch die Elemente gegebenen Bereiche von -1 bis +1. Extrem kleine Anfangswerte würden die Elemente unbefriedigend aussteuern und zu großen Fehlern führen. Diese verstärkerbedingte Einschränkung des Wertebereichs erfordert eine Normierung (für periodische Vorgänge - Amplitudennormierung) aller an Verstärkerausgängen auftretenden Rechengrößen.

Die zeitnormierte Differentialgleichung (4) führte zur Rechenschaltung im Bild 5. Dort treten x' und x an den Ausgängen der Verstärker auf, die folglich beide normiert werden müssen. Für eine gegebene Aufgabe werden - mindestens in einem



gewissen Zeitbereich - die zu normierenden Größen den Wertebereich

$$-x'_m < x' < +x'_m \quad \text{mit } x'_m = |x'|_{\max}$$

$$-x_m < x < +x_m \quad \text{mit } x_m = |x|_{\max}$$

einnehmen, bzw. durch ihre Maximalwerte dividiert in folgendem Einheitsbereich liegen

$$-1 < \frac{x'}{x'_m} < +1,$$

$$-1 < \frac{x}{x_m} < +1.$$

Deshalb sind x' und x in der Gleichung (4) entsprechend

$$x' = \underline{x}' \cdot x'_m$$

(\underline{x}' : lies: x-Strich-normiert)

und (7)

$$x = \underline{x} \cdot x_m$$

(\underline{x} : lies: x-normiert)

zu substituieren. \underline{x}' und \underline{x} sind dimensionslose Variable im Maschinenbereich -1 bis +1. \underline{x}' , die normierte Ableitung, ist in folgendem nicht zu verwechseln mit $(\underline{x})'$, der Ableitung von \underline{x} .

Mit der Gleichung (7) erhält man über

$$(\underline{x}' \quad \underline{x}')' = -\frac{\delta}{\lambda} \underline{x}' \quad \underline{x}'_m - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2} \underline{x} \quad \underline{x}_m$$

die zeit- und amplitudennormierte Differentialgleichung

$$(\underline{x}')' = -\frac{\delta}{\lambda} \underline{x}' - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2} \frac{x_m}{x'_m} \underline{x} \quad \text{mit } \underline{x}'(0) = \frac{x'_0}{x'_m} \quad (8a)$$

Die Aufgabe des 1. Integrierers der Rechenschaltung im Bild 6 ist es, diese Gleichung zu integrieren und \underline{x}' zu gewinnen. Der 2. Integrierer errechnet \underline{x} nach der leicht zu bestätigenden Integrität

$$(\underline{x})' = \frac{x'_m}{x_m} \underline{x}' \quad \text{mit } \underline{x}(0) = \frac{x_0}{x_m} \quad (8b)$$

Die Gleichungen (8a, 8b) führen in der bereits besprochenen Weise auf die zeit- und amplitudennormierte Rechenschaltung im Bild 6.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\delta}{\lambda} \dot{x} - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2} x \\ \dot{x}(0) &= \frac{\dot{x}(0)}{\lambda}; \quad x(0) = x_0 \\ \downarrow \\ x' &= \underline{x}' \cdot x'_m \\ x &= \underline{x} \cdot x_m \\ (\underline{x}')' &= -\frac{\delta}{\lambda} \underline{x}' - \frac{\omega_0^2}{\lambda^2} \frac{x_m}{x'_m} \underline{x} \\ (\underline{x})' &= \frac{x'_m}{x_m} \underline{x}' \end{aligned}$$

Bild 6
Zeit- und amplitudennormierte Rechenschaltung

4. Abschätzung von Maximalwerten

Um eine Aufgabe nach Abschnitt 3.2 zu normieren, ist es zuvor notwendig, die Maximalwerte aller in der Rechenschaltung auftretenden Variablen zu kennen.

Folgende Möglichkeiten können dieser Vorbereitung nützlich sein.

1. Das zu simulierende System ist in der Praxis bereits genügend bekannt, oder es bestehen Modelle, an denen die Maximalwerte bereits meßtechnisch ermittelt wurden.
2. Aus der mathematischen Beschreibung des Systems mit den Anfangswerten oder den Störgrößen können unter gewissen Annahmen Maximalwerte abgeschätzt werden, die im allgemeinen eine hinreichend optimale Normierung der Variablen gestatten.
3. In vielen Fällen, besonders bei nichtlinearen Systemen, ist eine Abschätzung der Maximalwerte nicht ohne weiteres möglich. Man gelangt häufig schneller als durch eine eingehende mathematische Analyse zur optimalen Schaltung, wenn man über die Zeitnormierung durch eine geeignete Wahl von λ auf gute Einstellbarkeit der Koeffizienten programmiert und grob geschätzte, möglichst gleiche Maximalwerte für die Variablen annimmt. Der probeweisen Rechnung mit der gefundenen Schaltung kann man dann genügend genaue Maximalwerte entnehmen und in einem zweiten Programmierschritt zur optimalen Schaltung kommen. Übersteuert bei der Proberechnung ein Integrierer, so können die Eingangsgrößen durch vorgeschaltete Potentiometer genügend herabgesetzt werden.

Für die lineare Schwingungsdifferentialgleichung lassen sich die gesuchten Werte jedoch durch einfache Abschätzungsanweisungen gewinnen. Sie hängen davon ab, ob das System durch Anfangswerte oder durch Störgrößen in Schwingungen versetzt wird.

4.1 Erregung durch Anfangswerte

Wird der lineare Feder-Dämpfer-Masse-Schwinger im Bild 7 durch die Anfangswerte $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ erregt, läßt sich die Lösungsfunktion $x(t)$ des ungedämpften Systems ($\delta = 0$) bekanntlich als Überlagerung der Teillösungen

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

darstellen.

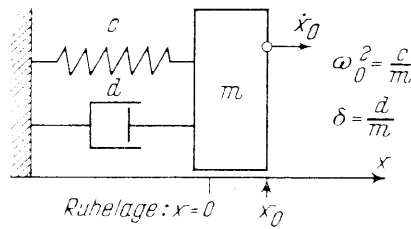


Bild 7. Schwinger durch Anfangswerte erregt

$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} - \omega_0^2 x$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\dot{x}_m = \omega_0 x_m$$

Daraus gewinnt man die Abschätzung für x_m

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (9a)$$

Die Ableitung der ungedämpften Lösungsfunktion nach der Zeit ergibt folgende Beziehung zwischen dem maximalen Schwingweg x_m und der maximalen Schwinggeschwindigkeit \dot{x}_m

$$\dot{x}_m = \omega_0 x_m \quad (9b)$$

Für gedämpfte Systeme ($\delta > 0$) liegen die gesuchten Maximalwerte stets unter den nach (9a, b) zu errechnenden Werten.

z.B. Mit den Werten:

$$\delta = 4,5 \text{ s}^{-1}; \omega_0^2 = 900 \text{ s}^{-2}; x(0) = 0,3 \text{ cm}$$

$$\dot{x}(0) = 12 \text{ cm/s}$$

für das System im Bild 7 ergibt sich die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -4,5 \text{ s}^{-1} \dot{x} - 900 \text{ s}^{-2} x,$$

die in Echtzeit zu simulieren ist.

Für die Zeitnormierung $\tau = \lambda t$ wählt man $\lambda = 10 \text{ s}^{-1}$. Für die Maximalwerte ergeben sich nach den Gleichungen (9a, b)

$$x_m = 0,5 \text{ cm}$$

$$\dot{x}_m = 15 \text{ cm/s bzw. } x'_m = 1,5 \text{ cm}$$

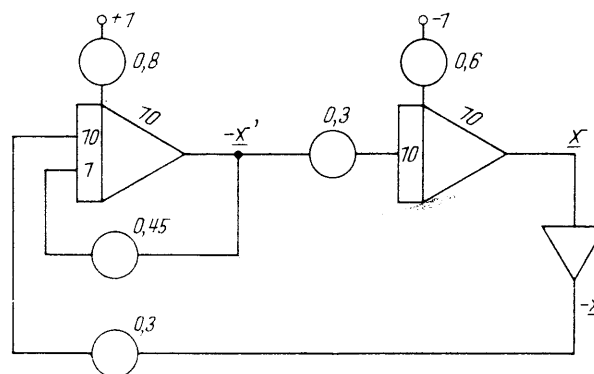
Die Maschinengleichungen nach (8a, b) lauten somit

$$(\underline{x}')' = -0,45 \underline{x}' - 3 \underline{x} \quad \text{mit } \underline{x}'(0) = 0,8$$

$$\text{bzw. } (\underline{x})' = 3 \underline{x}' \quad \text{mit } \underline{x}(0) = 0,6$$

Zur Echtzeitsimulation ist an der Maschine $k = \lambda = 10 \text{ s}^{-1}$ zu setzen.

Das berechnete Beispiel führt zur Rechenschaltung im Bild 8. Die Lösungsfunktionen $\underline{x}'(\tau)$ und $\underline{x}(\tau)$



$$(\underline{x}')' = -0,45 \underline{x}' - 3 \underline{x}$$

$$\underline{x}'(0) = 0,8$$

$$(\underline{x})' = 3 \underline{x}'$$

$$\underline{x}(0) = 0,6$$

$$\lambda = k = 10 \text{ s}^{-1}$$

Bild 8. Rechenschaltung für Echtzeitsimulation

der Schaltung sind im Bild 9 a in Abhängigkeit von der Maschinenvariablen τ und im Bild 9 b als Phasendiagramm (\underline{x}' aufgetragen über \underline{x}) wieder gegeben. Die volle Aussteuerung des Einheitsbereichs bestätigt, daß beide Variablen richtig normiert wurden.

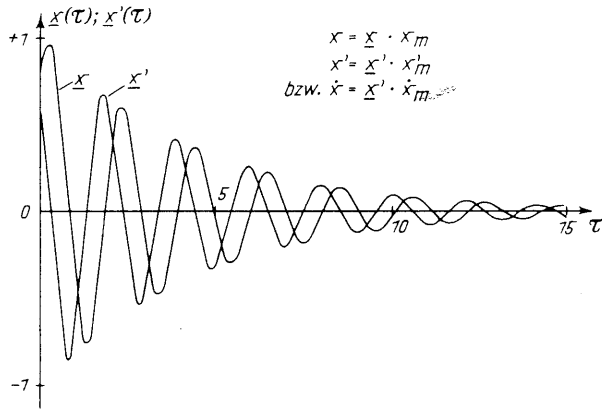


Bild 9 a. Lösungsfunktionen $x(\tau)$ und $x'(\tau)$ der Schaltung im Bild 8

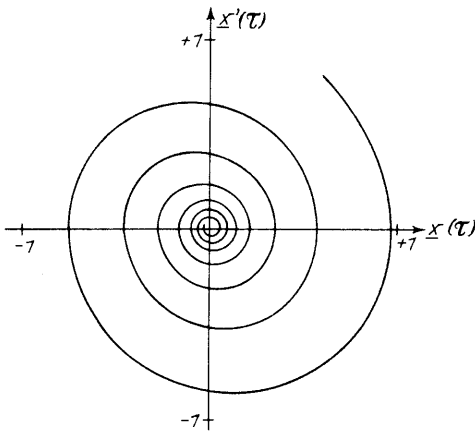


Bild 9 b. Phasendiagramm der Schwingerschaltung im Bild 8

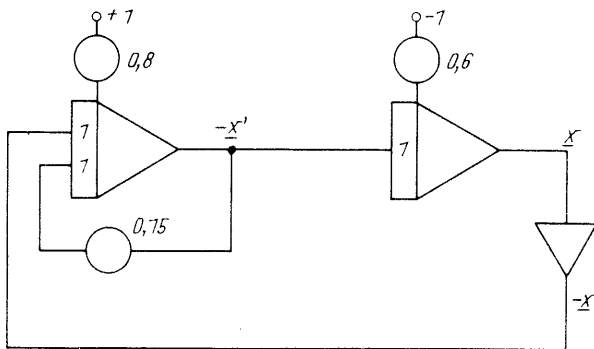


Bild 10. Rechenschaltung bei freier Wahl von λ

Um den Aufzeichnungen die Problemwerte zu entnehmen, ist

1. die τ -Achse mit dem festgesetzten λ -Wert in die Problemzeit t umzurechnen. In Bild 9 a entspricht so dem Gesamtmaßstab $\tau = 15$ eine Zeit $t = \frac{\tau}{\lambda} = \frac{15}{10\text{s}^{-1}} = 1,5 \text{ s}$.
2. der Einheitsmaßstab für x' und x nach der Gleichung (7) mit den Maximalwerten x'_m und x_m zu multiplizieren. So entspricht in den Bildern 9 a und 9 b der normierten Größe $\underline{x}' = 1$ eine Geschwindigkeit von 15 cm/s und $\underline{x} = 1$ ein Schwingweg von 0,5 cm.

Bei Verzicht auf eine Echtzeitsimulation des letzten Beispiels hätte man auch $\lambda = \omega_0 = 30 \text{ s}^{-1}$ wählen können. Es errechnet sich dann $x'_m = x_m = 0,5 \text{ cm}$ und die Maschinengleichungen lauten jetzt

$$\begin{aligned} (\underline{x}')' &= -0,15 \underline{x}' - \underline{x} & \text{mit } \underline{x}'(0) &= 0,8, \\ (\underline{x})' &= \underline{x}' & \text{mit } \underline{x}(0) &= 0,6. \end{aligned}$$

Sie führen zur Rechenschaltung im Bild 10.

Ein Vergleich mit der Schaltung im Bild 8 zeigt, daß sich bei freier - nicht durch die Echtzeitbedingung eingeschränkter - Wahl von λ zwei Potentiometer wegen $x'_m = x_m$ erübrigen. Man gelangt so zur einfachsten Rechenschaltung des gedämpften Schwingers.

4.2 Erregung durch eine Sprungfunktion

Der Schwinger im Bild 11 soll durch eine sprungförmige Änderung der Koordinate x_s um x_{sm} erregt werden. Die Differentialgleichung des Schwingungsvorgangs lautet jetzt

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\delta \dot{x} - \omega_0^2 (x - x_s) & \text{mit den Werten} \\ x(0) &= 0; \dot{x}(0) = 0 \text{ und } x_s = x_{sm} \end{aligned} \quad (10)$$

Unter dem Einfluß einer derartigen Störung kann im ungedämpften Fall die Lösungsfunktion $x(t)$ die doppelte Sprunghöhe, nämlich $2 x_{sm}$, erreichen. Im stark gedämpften Fall wird $x(t)$ zumindest x_{sm} . Man erhält so die Abschätzung

$$x_m = 2 x_{sm} \quad (11a)$$

Die ungedämpfte Schwingung wird eine Amplitude von $x_m/2$ um den Mittelwert x_{sm} haben. So ergibt sich entsprechend der Gleichung (9b) für den Maximalwert von \dot{x}_m die Beziehung

$$\begin{aligned} (\underline{x}')' &= -0,75 \underline{x}' - \underline{x} \\ \dot{x}'(0) &= 0,8 \end{aligned} \quad \dot{x}_m = \frac{1}{2} \omega_0 x_m \quad (11b)$$

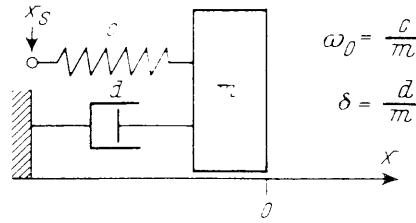
z.B. Das System im Bild 11 habe die Werte:

$$\omega_0^2 = 900 \text{ s}^{-2}; x_{sm} = 0,5 \text{ cm}$$

δ sei im Bereich zwischen 0 und 30 s^{-1} veränderlich.

Für die Zeitnormierung wähle man $\lambda = \omega_0 = 30 \text{ s}^{-1}$

Bild 11
Schwinger durch
Störfunktion x_s erregt



$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} - \omega_0^2 (x - x_s)$$

$$x_m = 2 x_{sm}$$

$$\dot{x}_m = \frac{1}{2} \omega_0 x_m$$

Nach den Gleichungen (11 a und 11 b) erhält man die Maximalwerte

$$x_m = 1 \text{ cm}$$

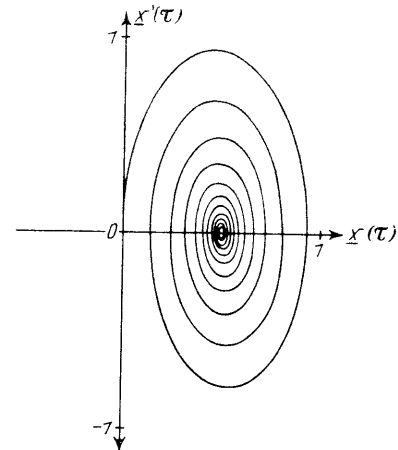
$$\dot{x}_m = 15 \text{ cm/s bzw. } x'_m = 0,5 \text{ cm}$$

und damit die Maschinengleichungen

$$(\underline{x}')' = -\frac{\delta}{\lambda} \underline{x}' - 2 \underline{x} + \underline{x}_s \quad \text{mit } \frac{x_s}{x_{sm}} = 1$$

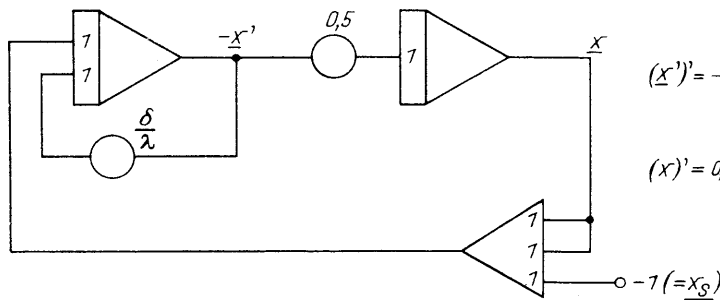
$$(\underline{x}') = 0,5 \underline{x}'$$

Der Potentiometerwert $\frac{\delta}{\lambda}$ liegt zwischen 0 und 1.



Die Rechenschaltung dieses Beispiels zeigt das Bild 12. Einige charakteristische Lösungskurven für $\frac{\delta}{\lambda}$ sind im Bild 13 wiedergegeben.

Bild 13 b. Phasendiagramm für Schwingung im Bild 12 für $\frac{\delta}{\lambda} = 0,1$



$$(\underline{x}')' = -\frac{\delta}{\lambda} \underline{x}' - 2 \underline{x} + \underline{x}_s$$

$$x_s = 1$$

$$(\underline{x}') = 0,5 \underline{x}'$$

4.3 Erregung durch eine periodische Störung

Das System im Bild 11 soll durch eine periodische Störung entsprechend

$$x_s = x_{sm} \cdot \sin \omega t$$

erregt werden. Die beschreibende Differentialgleichung lautet nun

$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} - \omega_0^2 (x - x_{sm} \sin \omega t) \quad (12)$$

Die maximale Amplitude der Lösungsfunktion $x(t)$ hängt in diesem Fall

1. von dem Verhältnis der erregenden Frequenz ω zur Eigenfrequenz ω_0 ab. Für $\omega = \omega_0$ erreicht die erzwungene Schwingung ihren größten Wert (Resonanz).
2. von der Dämpfungsgröße δ des Systems ab. Im Resonanzfall wird für $\delta = 0$ die Amplitude ∞ .

Bild 12. Rechenschaltung für sprunghafte Störung

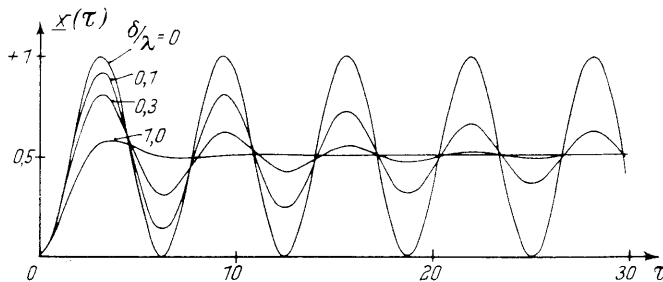


Bild 13 a. Schwingweg bei sprungförmiger Erregung (Schaltung Bild 12)

Für Dämpfungen $\delta > 0$ und $\omega = \omega_0$ erreicht die erzwungene Schwingung folgende Maximalwerte

$$x_m = \frac{\omega_0}{\delta} x_{sm} \quad (13a)$$

$$\dot{x}_m = \omega_0 x_m \quad (13b)$$

z.B. Der Schwinger im Bild 11 habe die Werte:

$$\delta = 7,5 \text{ s}^{-1}, \omega_0^2 = 900 \text{ s}^{-2}$$

und werde durch $x_s = 0,2 \text{ cm} \cdot \sin \omega t$ erregt. Die Frequenz ω ändere sich von 10 bis 100 s^{-1} .

Für die Zeitnormierung wähle man wieder $\lambda = 30 \text{ s}^{-1}$. Mit den Gleichungen (13a, 13b) erhält man die Maximalwerte

$$x_m = 4 \cdot 0,2 \text{ cm} = 0,8 \text{ cm}$$

$$\dot{x}_m = 24 \text{ cm/s bzw. } x'_m = 0,8 \text{ cm}$$

Die Normierung von Gleichung (12) führt zu den Maschinengleichungen

$$(\underline{x}')' = -0,25 \underline{x}' - \underline{x} + 0,25 \sin \frac{\omega}{\lambda} \tau$$

$$(\underline{x})' = \underline{x}'$$

Im Bild 14 ist die Rechenschaltung dieses Beispiels wiedergegeben. Das Bild 15 zeigt die erzwungene Schwingung $\underline{x}(\tau)$ in Abhängigkeit von der linear veränderten Störfrequenz ω . Die notwendige Störschwingung wird nach der Schaltung im Bild 17 gewonnen.

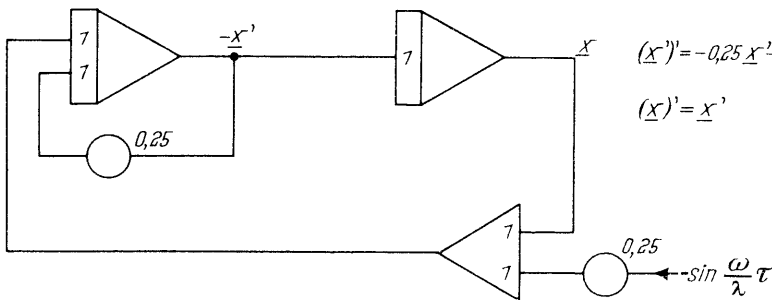


Bild 14. Rechenschaltung: Schwinger mit periodischer Störung

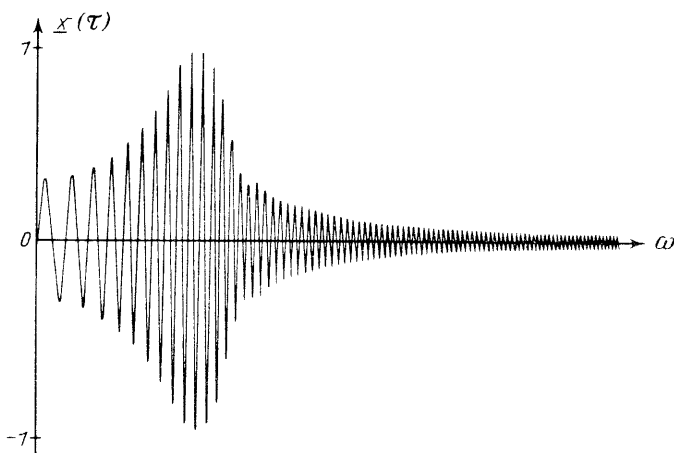


Bild 15. Erzwungene Schwingung bei einer veränderten Störfrequenz ω - Schaltung Bild 14

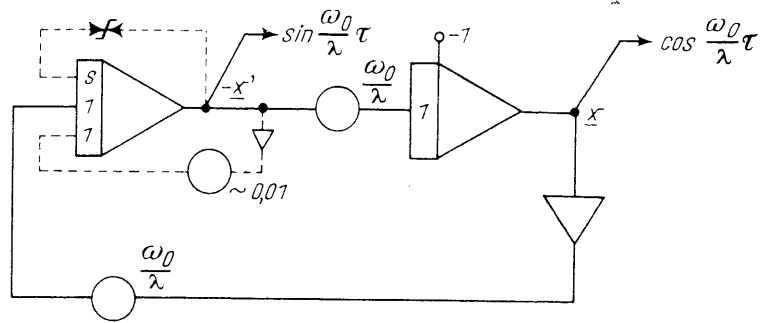


Bild 16. Amplitudenstabiler Sinus-Cosinus-Oszillator

Abschätzungsformeln für Maximalwerte:

Differentialgleichung: $\ddot{x} = -\delta \dot{x} - \omega_0^2 (x - x_s)$

Anregung durch:	x_m	\dot{x}_m
Anfangswerte $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$	$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$	$\dot{x}_m = \omega_0 x_m$
Sprungfunktion $x_s = x_{sm}$	$x_m = 2 x_{sm}$	$\dot{x}_m = \frac{1}{2} \omega_0 x_m$
Periodische Störung $x_s = x_{sm} \sin \omega t$	$x_m = \frac{\omega_0}{\delta} x_{sm}$	$\dot{x}_m = \omega_0 x_m$

$$(\underline{x}')' = -0,25 \underline{x}' - \underline{x} + 0,25 \sin \frac{\omega}{\lambda} \tau$$

$$(\underline{x})' = \underline{x}'$$

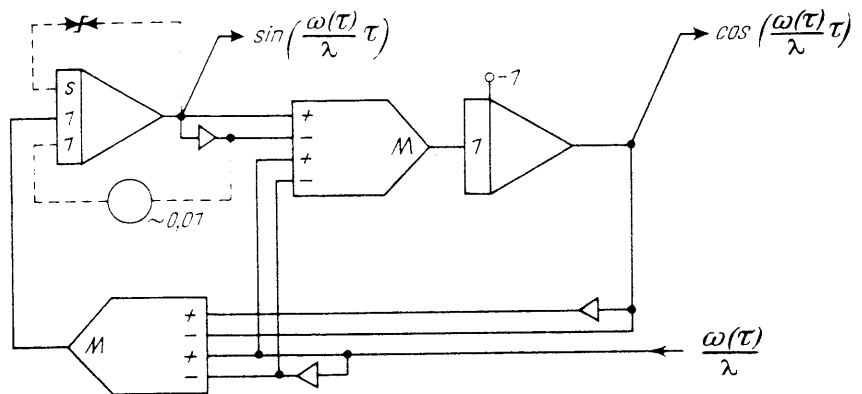
5. Erzeugung ungedämpfter Schwingungen

Ungedämpfte Sinus- oder Cosinusschwingungen werden als periodische Störfunktionen für Schwingungssysteme oder auch zur Frequenzganganalyse benutzt. Dazu sollte die Kreisfrequenz ω dieser Schwingung von Hand oder nach einer vorgeschriebenen Zeitfunktion geändert werden können.

Eine Schaltung für eine ungedämpfte Schwingung ist aus der normierten Schwingungsgleichung im Bild 6 für $\delta = 0$ zu erhalten. Da $\dot{x}_m = \omega_0 x_m$, ergibt sich für $\frac{m}{x_m}$ der Wert $\frac{\omega_0}{\lambda}$. Die beiden noch verbleibenden Potentiometer erhalten so den gleichen Wert $\frac{\omega_0}{\lambda}$. Fordert man am Ausgang des 1. Integrierers - $\underline{x}' = \sin \frac{\omega_0}{\lambda} \tau$, muß der Anfangswert $\underline{x}'(0) = 0$ gesetzt werden. Am Ausgang des 2. Integrierers wird für $\underline{x} = \cos \frac{\omega_0}{\lambda} \tau$ der Anfangswert $\underline{x}(0) = 1$.

Die so gewonnene Schaltung im Bild 16 erzeugt somit an den eingezeichneten Stellen eine ungedämpfte Sinus- und Cosinusschwingung, die für

Bild 17
Sinus-Cosinus-Oszillator
mit variabler Frequenz



alle einstellbaren Werte von $\frac{\omega_0}{\lambda}$ (mit der Eingangswertigkeit der Integrierer bis 10) normiert ist. Durch gleichzeitiges Verändern der beiden Potentiometer läßt sich die Frequenz der Schwingung variieren.

Soll die Frequenz nach einer bestimmten Funktion $\omega(\tau)$ verändert werden, müssen beide Potentiometer durch Multiplizierer ersetzt werden, die die Variable $\omega(\tau)$ in der Schaltung wirksam werden lassen (Bild 17). Eine genauere Analyse der Rechenschaltung fordert allerdings, daß die Änderung von ω genügend langsam erfolgen muß,

$$\text{Bedingung: } \omega'(\tau) \cdot \tau \ll \omega(\tau)$$

um eine störende Amplitudenänderung zu vermeiden. Auch die Fehler der Rechenelemente können

bei längeren Rechenzeiten zu unerwünschten Abweichungen von der Anfangsamplitude führen.

Für Resonanzuntersuchungen ist aber eine über lange Zeit stabile Amplitude notwendig. Sie ist durch zwei Rückführungen (in den Bildern 16 und 17 gestrichelt dargestellt) zu erreichen. Die Rückführung über das mit kleinem Wert eingestellte Potentiometer entspricht einer geringen negativen Dämpfung und bewirkt eine langsame Anfachung der Schwingung. Das gegeneinandergeschaltete Zenerdiodenpaar erzeugt dagegen eine starke Dämpfung, sobald die Spannungsamplitude die Durchbruchspannung der Diodenanordnung übersteigen möchte. Durch eine geeignete Wahl der Dioden kann so eine Begrenzung bei der Einheitsgröße 1 erfolgen. Bei diesem Wert stabilisiert sich die Amplitude der Schwingung. Die Verzerrung der Kurvenform ist durch einen kleinen Wert des Anfachpotentiometers vernachlässigbar klein zu halten.

1. Nichtlineare einläufige Schwinger

Ein System und somit die beschreibenden Differentialgleichungen sind nichtlinear, wenn die abhängigen Variablen oder deren Ableitungen von anderem als 1. Grad auftreten, d. h. wenn man Glieder der Form: $x \dot{x}$, x^2 , $f(x)$, $x \dot{x}^2$, $\sin(x)$ usw. vorfindet. Methoden, die durch Superposition von Einzellösungen zur Lösung führen, scheitern bei nichtlinearen Differentialgleichungen ebenso wie das Verfahren der Laplace-Transformation.

Deshalb kommen gerade bei nichtlinearen Aufgaben die Möglichkeiten des Analogrechners voll zur Geltung. Er wird grundsätzlich so wie bei linearen Differentialgleichungen programmiert. Abgesehen von der häufig umfangreicheren Vorbereitung treten keine zusätzlichen Schwierigkeiten auf. Allerdings müssen jetzt neben den Variablen auch Funktionen normiert werden.

An einigen Beispielen sollen die Methoden skizziert werden. Wenn diese vornehmlich aus dem Bereich der mechanischen Schwingungen ausgewählt worden sind, so geschah dies wegen der häufig größeren Anschaulichkeit derartiger Systeme.

1.1 Mathematisches Pendel bei kleinen und großen Ausschlägen

Die Möglichkeiten des Analogrechners zur Lösung nichtlinearer Systeme lassen sich gut am mathematischen Pendel bei verschiedenen großen Aus-

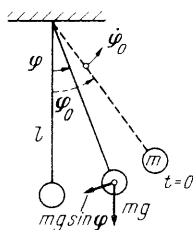


Bild 1. Mathematisches Pendel

schlägen und beim überschwingenden Pendel studieren, wenn eine starre Pendelstange vorausgesetzt wird.

Das in Bild 1 dargestellte Pendel der Länge l führt nach Auslenkung um $\varphi(0) = \varphi_0$ oder (und) angestoßen mit $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ freie Schwingungen um die Ruhelage $\varphi = 0$ aus. Die Bewegungsgleichung auf der Erdoberfläche (Erdbeschleunigung g) ergibt sich aus dem zu jeder Zeit gültigen Momentensatz

$$m l^2 \ddot{\varphi} = - m g l \sin \varphi \quad \text{zu} \quad \ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \sin \varphi \quad (1)$$

mit den Anfangswerten $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$

a) Linearisiertes Pendel

Für kleine φ , d. h. für $\sin \varphi \approx \varphi$, ergibt sich daraus die linearisierte Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \varphi .$$

Diese zuvor behandelte ungedämpfte lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat die harmonischen Lösungen $\sin \omega_0 t$ und $\cos \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist die Eigenfrequenz des linearisierten Pendels.

Wenn bei größeren Ausschlägen keine Linearisierung der einfachen Gleichung (1) mehr erlaubt ist, würde die analytische Behandlung bereits auf elliptische Integrale führen. Am Analogrechner genügt eine Nachbildung der Sinus-Funktion, die in verschiedenen Fällen im folgenden gezeigt wird, um die Lösung zu gewinnen.

Zur Normierung der Pendelgleichung sind die Maximalwerte φ_m und $\dot{\varphi}_m$ erforderlich. Für kleine φ sind die Abschätzungsformeln für die lineare Differentialgleichung zu benutzen. Für größere ist eine Beziehung zwischen $\dot{\varphi}_m$ und φ_m aus dem Energiesatz zu gewinnen, den man durch Integration der Schwingungsgleichung erhält

$$\frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_m)^2 = m g l (1 - \cos \varphi_m) .$$

Mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ergibt sich daraus

$$\dot{\varphi}_m = \omega_0 \sqrt{2 (1 - \cos \varphi_m)} \quad (2)$$

Bei Schwingungen bis zum oberen Umkehrpunkt kann somit

$$\varphi_m \leq \pi, \quad \dot{\varphi}_m \leq 2\omega_0 \quad (3)$$

benutzt werden.

Mit den Normierungsbeziehungen

$$\tau = \lambda t, \quad \varphi = \frac{\varphi}{\varphi_m}, \quad \varphi' = \frac{\varphi'}{\varphi'_m}$$

erhält man durch Multiplikation von Gleichung (1)

mit $\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\varphi'_m}$ die normierte Pendelgleichung

$$(\varphi')' = -\frac{\omega_0^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\varphi'_m} \sin(\varphi_m \varphi)$$

und bei freier Wahl von $\lambda = \omega_0$

$$(\varphi')' = -\frac{1}{\varphi'_m} \sin(\varphi_m \varphi) \quad (4)$$

mit den Anfangswerten

$$\varphi'(0) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi'_m}, \quad \varphi(0) = \frac{\varphi_0}{\varphi_m}$$

Die zweite triviale Gleichung für $(\varphi)'$ soll hier und nachfolgend nicht mehr gesondert geschrieben werden.

Nach Gleichung (4) ist die allgemeine Rechenschaltung in Bild 2 gebildet worden.

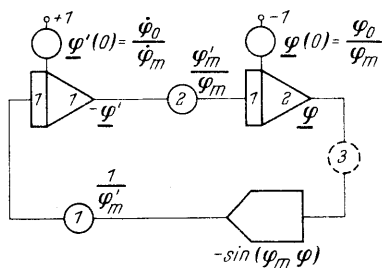


Bild 2. Allgemeine Rechenschaltung des mathematischen Pendels

Je nach dem Bereich von φ_m kann am Analogrechner die Sinus-Funktion auf verschiedene Weise erzeugt werden. Diese Möglichkeiten sollen im einzelnen diskutiert werden.

b) Pendel mit großen Ausschlägen

Liegen die Werte für φ_m im Bereich $\varphi_m \leq \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi_m \leq \pi$, so ist die Funktion $\sin(\varphi_m \varphi)$ bereits normiert. Man verwendet in diesem Fall am einfachsten die in den Rechner einsetzbaren festgestellten Funktionsgeber

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} E\right) \quad \text{oder} \quad A = \sin(\pi E).$$

φ_m ist demnach $\pi/2$ oder π zu wählen. Derartigen Funktionsgebern muß + E und - E zugeführt werden. Durch Vertauschen der Eingänge ist die negierte Sinus-Funktion zu erhalten.

Nimmt man $\varphi_m = \pi$ an, so ergeben sich für die Potentiometer in Bild 2 folgende Werte:

$$\text{Pot (1): } \frac{1}{\varphi'_m} = \frac{\lambda}{2\omega_0} = 0,5$$

$$\text{Pot (2): } \frac{\varphi'_m}{\varphi_m} = \frac{2\omega_0}{\lambda \varphi_m} = \frac{2}{\pi} = 0,636.$$

Liegt φ_m jedoch nicht in der Nähe von $\pi/2$ oder π , und möchte man die dann eintretende schlechtere Aussteuerung der Integrierer vermeiden, so ist mit den wirklichen Maximalwerten zu normieren und in der Rechenschaltung ein Pot (3) einzufügen, daß den Wert $\frac{\varphi'_m}{\pi/2}$ oder $\frac{\varphi'_m}{\pi}$ erhält. Der Sinus-Funktionsgeber bildet dann wieder richtig:

$$\text{z. B. } -\sin\left[\pi \frac{\varphi'_m}{\pi} \frac{\varphi}{\pi}\right] = -\sin(\varphi_m \varphi).$$

c) Pendel mit kleineren Ausschlägen

Für $0,1 < \varphi_m < \pi/2$ ist ein Festfunktionsgeber wegen mangelnder Aussteuerung nicht empfehlenswert. Ist z. B. $\varphi_m = \pi/6$ ($= 30^\circ$), so erreicht der Funktionswert $\sin(\varphi_m \varphi)$ maximal $\pm 0,5$. Jetzt sollte besser ein einstellbarer Funktionsgeber verwendet und eine spezielle Normierung der Sinus-Funktion wie folgt vorgenommen werden:

$$\sin \varphi_m \varphi = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_m \varphi}{\varphi_m}\right)}{\sin \varphi_m} \sin \varphi_m.$$

Im Funktionsgeber wird jetzt die Funktion $\frac{\sin \varphi_m \varphi}{\sin \varphi_m}$

durch einen Polygonzug approximiert. Der Faktor $\sin \varphi_m$, um den die Sinusfunktion nun größer nachgebildet wird, ist dann in Pot. (1) der Schaltung zu berücksichtigen.

Für $\varphi_m = \pi/6$ und somit nach Gleichung (2)

$$\varphi'_m = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}\right)} = 0,52 \text{ erhält man folgende}$$

Werte für die optimale Simulationsschaltung:

$$\text{Pot (1): } \frac{1}{\varphi'_m} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{0,52} \cdot \frac{1}{2} = 0,97$$

$$\text{Pot (2): } \frac{\varphi'_m}{\varphi_m} = \frac{0,52}{\pi/6} = 0,99.$$

d) Überschwingendes Pendel

Für Pendelüberschläge, $\varphi > \pi$, die natürlich nur bei angestoßenem Pendel ($\dot{\varphi}(0) > 0$) erhalten werden, sind Funktionsgeber bisher genannter Art nicht brauchbar, da sie mit genügender Genauigkeit eine Sinus-Funktion nur über eine Periode nachbilden können. Eine Funktion $\sin \varphi$ einer Variablen $\varphi(\tau)$ ohne Beschränkung in der Periodenzahl kann aber als Lösung der ungedämpften Schwingungsdifferentialgleichung erzeugt werden, wenn über die Ableitung φ' verfügt werden kann. Leiten wir zunächst eine solche Funktionsgeberschaltung ab.

Setzt man

$$A_1 = \sin \varphi, \quad A_2 = \cos \varphi,$$

so findet man durch Differentiation nach τ die beiden zugehörigen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$A_1' = A_2 \varphi', \quad A_2' = -A_1 \varphi'$$

mit den Anfangswerten:

$$A_1(0) = \sin \varphi_0, \quad A_2(0) = \cos \varphi_0.$$

Da A_1 und A_2 definitionsgemäß normiert sind, lauten die normierten Differentialgleichungen

$$(A_1)' = A_2 \varphi_m' \varphi', \quad (A_2)' = -A_1 \varphi_m' \varphi' \quad (5)$$

In Bild 3 sind die Rechenschaltung sowie das Symbol dieses speziellen Funktionsgebers dargestellt. Danach sind aus der normierten Ableitung φ' die

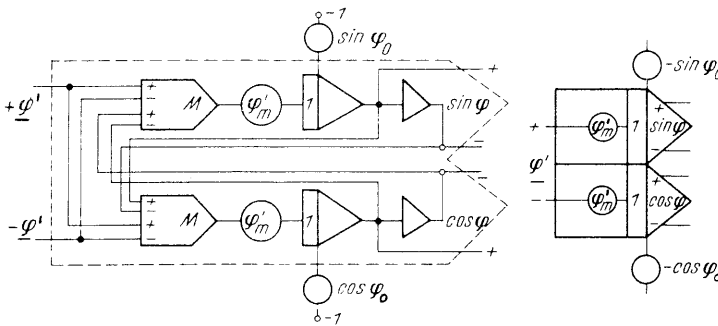


Bild 3. Sinus-Cosinus-Funktionsgeber

Funktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ jeweils mit beiden Vorzeichen zu erhalten. Allerdings ist φ' mit beiden Vorzeichen zuzuführen und φ_m' an zwei Potentiometern einzustellen. Selbst unter Verzicht auf eine gute Aussteuerung der Multiplizierer sollte φ_m' nicht durch ein Potentiometer vor diesem Funktionsgeberelement verwirklicht werden. Das Potentiometer würde aussteuerungsabhängig belastet, da die Multiplizierer eine nichtlineare Last darstellen, und man müsste es deshalb mit einem zusätzlichen Verstärker vom Eingang des Funktionsgebers abtrennen. Schließlich müssen noch die Anfangswerte $\sin \varphi_0$ und $\cos \varphi_0$ eingegeben werden, weil es sich hier um ein nichtlineares Integrierelement handelt, was auch im Symbol zum Ausdruck kommt.

Mit der entwickelten Funktionsgeberschaltung soll jetzt eine normierte Rechenschaltung für ein überschwingendes Pendel abgeleitet werden. Wenn die Pendelmasse die höchste Lage gerade durchlaufen kann, ergibt sich für die maximale Winkelgeschwindigkeit nach Gleichung (3) der Wert $\varphi_m' = 2$. Wir wollen das Pendel bis zum doppelten Wert $\varphi_m' = 4$ untersuchen. Aus dem von $-\infty$ bis $+\infty$ reichenden φ -Bereich lassen wir $-2\pi \leq \varphi \leq +2\pi$ ($\varphi_m = 2\pi$) zu, d.h. zwei Umläufe des Pendels.

Aus Gleichung (4) erhalten wir mit

$$\varphi_m = 2\pi \text{ und } \varphi_m' = 4$$

die Maschinengleichung

$$(\varphi')' = -0,25 \sin(2\pi\varphi) \quad (6)$$

mit den Anfangswerten

$$\varphi'(0) = \frac{\varphi_0'}{\varphi_m'}, \quad \varphi(0) = \frac{\varphi_0}{\varphi_m}$$

wollen wir positive und negative Anfangswerte einstellen können, so ergibt sich die Rechenschaltung

in Bild 4, in der für die Anfangswerte Potentiometer mit zwei Eingängen vorgesehen sind.

Der zweite Integrierer für φ ist demnach nur noch notwendig, wenn φ selbst von Interesse ist. Im allgemeinen wird man zur Darstellung der Schwingung die in kartesischen Koordinaten (Bild 1) verwenden. Es sind dazu

$$Y = -1 \cos \varphi \text{ und } X = 1 \sin \varphi$$

auf ein Registriergerät zu geben. Beide Rechengrößen sind für eine Einheitslänge ($l = 1$) der Schaltung zu entnehmen.

An der Maschine bestätigt man leicht, daß für

$$\varphi(0) = 0,5, \quad \varphi'(0) = 0 \text{ und } \cos \varphi_0 = -1, \quad \sin \varphi_0 = 0$$

oder für

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0,5 \quad \cos \varphi_0 = +1, \quad \sin \varphi_0 = 0$$

gerade der obere Umkehrpunkt erreicht wird. Die Schaltung entspricht der gewünschten Normierung.

Wird im letzten Fall $\varphi'(0) > 0,5$ gesetzt, so wird das Pendel überschwingen und, da es ungedämpft angenommen wurde, fortwährend in gleicher Richtung umlaufen.

Das Phasendiagramm der Schwingungen ist für verschiedene Anfangswerte in Bild 5 wiedergegeben. Das hin- und herschwingende Pendel hat geschlos-

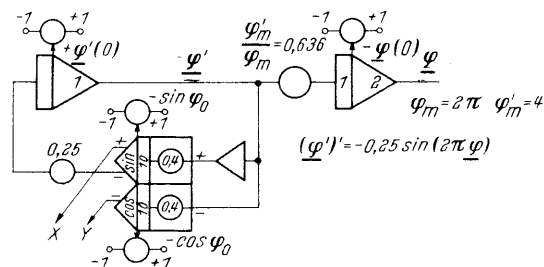


Bild 4. Rechenschaltung des überschwingenden Pendels

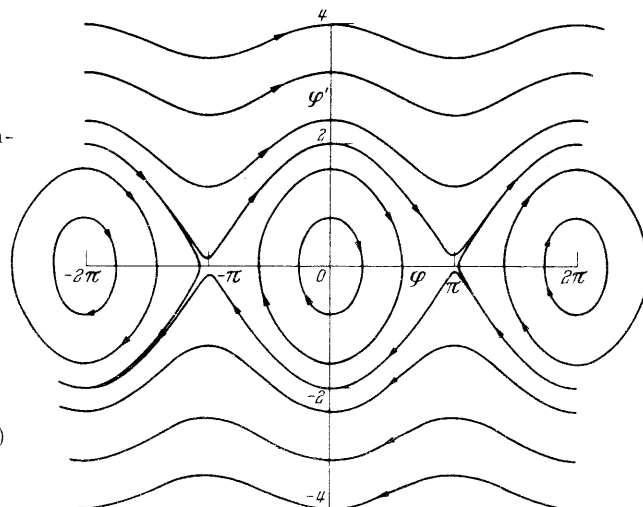


Bild 5. Phasenkurven des mathematischen Pendels

oben: in positiver φ -Richtung überschwingend
mitte: um $\varphi = 0, 2\pi, -2\pi$ usw. pendelnd
unten: in negativer φ -Richtung überschwingend

sene Phasenkurven um $0, +2\pi - 2\pi$ usw. Die nach rechts und links laufenden Wellenkurven entsprechen der recht oder links herum überschwingenden Masse.

1.2 Schwinger mit nichtlinearer Dämpfung

Die mathematische Analyse eines Röhrenoszillators führt zu einer Differentialgleichung mit einem nichtlinearen Dämpfungsglied, das eine Selbsterregung der Schwingung bewirkt. Mit guter Annäherung läßt sich die Spannung U am Schwingkreis (L, C) eines solchen Oszillators durch folgende Gleichung beschreiben:

$$L C \ddot{U} - (\alpha - \beta U^2) \dot{U} + U = 0.$$

α und β sind Parameter, die Konstanten der Rückkopplungsschaltung und der Röhrencharakteristik enthalten.

Führt man nach $\frac{\beta}{\alpha} U^2 = x^2$ eine dimensionslose Größe x ein, sowie mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Eigenfrequenz) eine Zeittransformation $\tau = \lambda t$ durch, so erhält man mit $a = \frac{\alpha}{\sqrt{LC}}$ die nach van der Pol benannte Differentialgleichung

$$x'' = a(1 - x^2)x' - x \quad (7)$$

Dieses System soll für Werte $0 \leq a \leq 2,5$ untersucht werden.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der linearen Schwingungsdifferentialgleichung, so sehen wir anstelle des Dämpfungsfaktors ($-\delta$) hier $+a(1-x^2)$ stehen. Für kleine Amplituden ($x < 1$) ist somit eine Anfängerung der Schwingung zu erwarten, die durch schaltungsbedingte Störungen geringster Art auch ohne Anfangswerte ($x_0 = 0, x'(0) = 0$) eintreten wird. Für $x > 1$ wechselt das betrachtete Glied das Vorzeichen und wirkt dämpfend. Dieses gegensinnige Verhalten wird bei dem freien Schwinger dazu führen, daß er sich bei einer bestimmten Amplitude stabilisiert.

Die notwendige Abschätzung der Maximalwerte ist jetzt aus Anfangswerten nicht mehr möglich, da diese für $a > 0$ nach wenigen Schwingungen bedeutungslos sind. Nur Anfangswerte, die zunächst größere Amplituden als bei der stationären Schwingung erzeugen, sind bei Beginn der Simulation zu berücksichtigen.

Eine Abschätzung von x_m aus der Bedingung für die stationäre Schwingung $(1-x^2) \approx 0$ ist wegen mangelnder Kenntnis der Kurvenform nur grob möglich. Einer Versuchsschaltung wird leicht zu entnehmen sein, daß für alle a gilt:

$$x_m = 2.$$

Auch für x'_m kann zunächst nur ein Wert $\approx x_m$ abgeschätzt werden, da für kleine a die Eigenfrequenz gleich 1 ist. Für größere a , d.h. für größere Verzerrungen der zunächst sinusförmigen Lösung, ist sicher $x'_m > x_m$. Auch hier zeigt erst die Versuchsrechnung, daß im zu betrachtenden Bereich für a gilt

$$x'_m = 5.$$

Mit $x = \frac{x}{x_m}$ und $x' = \frac{x'}{x'_m}$ erhalten wir aus Gleichung (7)

$$(\underline{x}')' = a \left(1 - x_m^2 (\underline{x})^2 \right) \underline{x}' - \frac{x_m}{x'_m} \underline{x} \quad (8)$$

mit den Anfangswerten

$$\underline{x}'(0) = x'_0/x'_m, \quad \underline{x}(0) = x_0/x_m$$

Die eingesetzten Maximalwerte ergeben schließlich die Maschinengleichung

$$(\underline{x}')' = 4a \left(0,25 - (\underline{x})^2 \right) \underline{x}' - 0,4 \underline{x}. \quad (9)$$

Danach wird die Rechenschaltung in Bild 6 gewonnen. Die nichtlineare Klammer der Gleichung ist mit einem Multiplizierer nachgebildet, dessen Ausgangsverstärker gleichzeitig die Addition der Konstanten vornimmt. Das Potentiometer (0,4a),

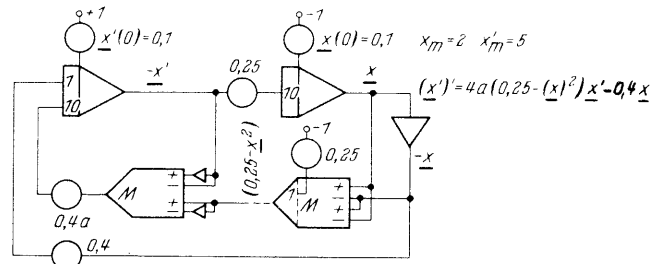


Bild 6. Rechenschaltung der van der Polschen Differentialgleichung

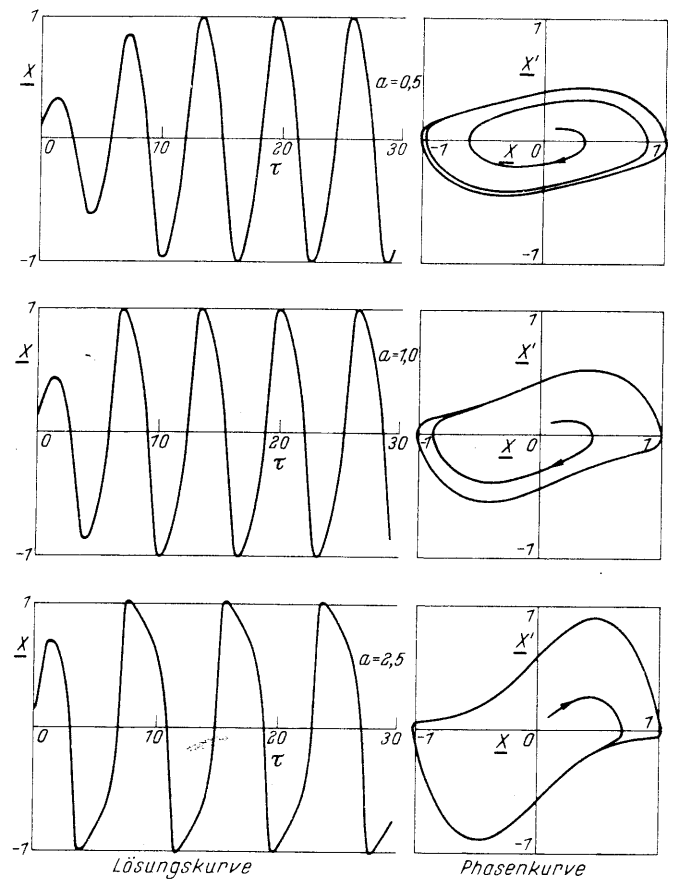


Bild 7. Lösungskurven $\underline{x}(\tau)$ und Phasenkurven \underline{x}' über \underline{x} für drei Parameter a

das das nichtlineare Verhalten des Schwingers bestimmt, erreicht für $a = 2,5$ gerade den Maximalwert 1. Um einen definierten Beginn der Schwingung zu erreichen, werden für die Untersuchungen Anfangswerte $\underline{x}'(0) = 0,1$ und $\underline{x}(0) = 0,1$ angenommen.

In Bild 7 sind Lösungskurven $\underline{x}(\tau)$ und Phasenkurven $\underline{x}'(\underline{x})$ für verschiedene a aufgezeichnet.

Mit wachsendem a stellt sich die Schwingung mit konstanter Amplitude schneller ein, gleichzeitig nehmen die Periode der Schwingung und die nichtlineare Kurvenform zu, was besonders eindrucksvoll aus den Phasenkurven ersichtlich ist. Schließlich wird bei $a = 2,5$ praktisch der Einheitsbereich ausgenutzt und damit die richtige Annahme der Maximalwerte bestätigt.

1.3 Bistabiler Schwinger

Als Beispiel für einen Schwinger mit nichtlinearen elastischen Eigenschaften soll ein System mit zwei stabilen Lagen betrachtet werden, das einer periodischen Störung

$$\underline{x}_s = x_{sm} \sin \omega t$$

unterworfen ist. Die Differentialgleichung des Systems lautet

$$\ddot{x} = -\delta \dot{x} + (a - x^2) \cdot x s^{-2} + x_s s^{-2} \quad (10)$$

Vergleichen wir mit der linearen Schwingungsgleichung, so ist das Glied der rückstellenden Federkraft $(-\omega_0^2 x)$ jetzt $(a - x^2) x s^{-2}$.

Für kleine x ($x \ll \sqrt{a}$) liegt demnach eine vom Zentrum $x = 0$ wegtreibende Kraft vor. Die Gleichgewichtslagen des Systems ergeben sich aus $(a - x^2) = 0$ zu

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{a} \quad (11)$$

Die Eigenfrequenz ω_0 für Schwingungen um die Ruhelagen berechnen wir aus der Ableitung des elastischen Glieds, die der Federkonstanten bei der linearen Differentialgleichung entspricht. Wir erhalten $\sqrt{\frac{d}{dx} (a - x^2)x} = \sqrt{a - 3x^2}$ und für $x = \pm \sqrt{a}$

$$\omega_0 = \sqrt{2a} s^{-1} \quad (12)$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen soll nun ein solches System mit den Konstanten

$$\delta = 0,2 s^{-1}, a = 0,1$$

untersucht werden.

Gleichung (12) erlaubt es, eine Eigenfrequenz von etwa $0,5 s^{-1}$ anzugeben, und mit $\dot{x}_m = \omega_0 x_m$ (für die lineare Differentialgleichung gültig) eine Beziehung $\dot{x}_m = 0,5 s^{-1} x_m$ abzuschätzen. Eine Versuchsrechnung wird letzteres bestätigen und gleichzeitig zeigen, daß eine Störampplitude von $x_{sm} = 0,1$ etwa ein $x_m = 1$ erzeugt.

Mit den Systemkonstanten erhält man aus Gleichung (10)

$$\ddot{x} = -0,2 \dot{x} + (0,1 - x^2) s^{-2} x + 0,1 s^{-2} \sin \omega t$$

Die Normierung erfolgt mit

$$\tau = \lambda t \quad (\lambda = 1 s^{-1}), \quad x = \underline{x} \cdot 1, \quad x' = \underline{x}' \cdot 0,5$$

und führt zur Maschinengleichung

$$(\underline{x}')' = -0,2 \underline{x}' + 2(0,1 - (\underline{x})^2) \underline{x} + 0,2 \sin \frac{\omega}{\lambda} \tau \quad (13)$$

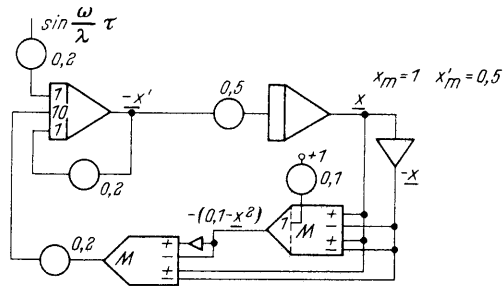


Bild 8. Rechenschaltung des bistabilen Schwingers

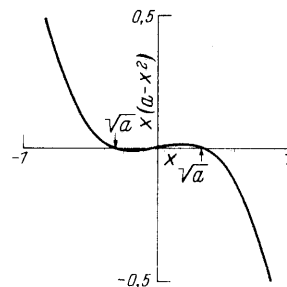


Bild 9. Das elastische Glied des bistabilen Schwingers

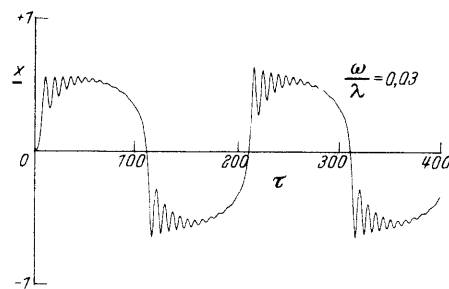


Bild 10. Bistabiler Schwinger mit periodischer Störung unterhalb der Eigenfrequenz

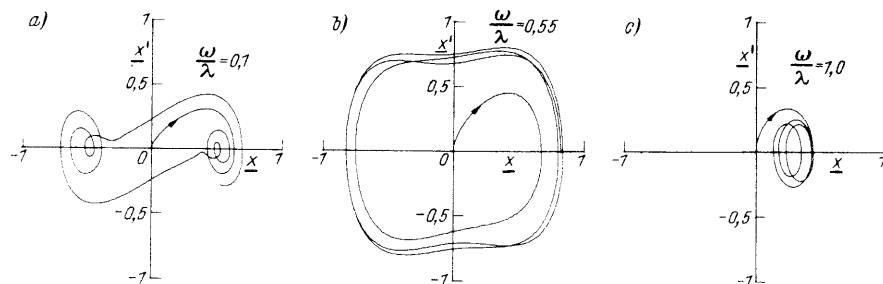


Bild 11. Phasenkurven des bistabilen Schwingers

a) unterhalb der Resonanz, b) in der Nähe der Resonanz
c) oberhalb der Resonanz

Die Rechenschaltung ist im Bild 8 wiedergegeben. Die notwendige Störfunktion wird nach der Schaltung im Bild 16 (Teil I) erzeugt. Der Rechnung kann nun die das elastische Glied charakterisierende kubische Parabel mit den beiden stabilen Lagen entnommen werden (Bild 9). Bild 10 zeigt das typische Einschwingen in die stabilen Lagen. Der Wechsel wird durch die hier sehr niederfrequente Störung verursacht. Der Einfluß der Störfrequenz ist aus den Phasenbildern (Bild 11) zu ersehen. Mit steigender Frequenz wird der Wechsel zwischen den Stabilitätspunkten schneller; in der Resonanz geht die Schwingung über beide Lagen hinweg und pendelt schließlich oberhalb der Resonanzfrequenz nur noch um eine Lage. Bild 12 zeigt letztlich noch die Phasenlage zur Störschwingung.

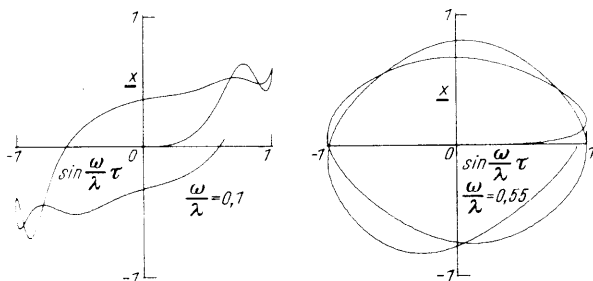


Bild 12. Bistabile Schwingung in Abhängigkeit von der Störgröße

2. Mehrläufige Schwinger

Besteht ein schwingungsfähiges System aus n in einer Richtung gegeneinander beweglichen Teilsystemen (z. B. Massen) und hat es somit n Freiheitsgrade, so führt die mathematische Beschreibung auf n Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Sind die einzelnen Differentialgleichungen linear (lineare Systeme), kann das Superpositionsprinzip zur Lösung angewendet werden. Auch die Methoden der linearen Regelungstheorie führen schnell zum Ziel. Bei genauerer Analyse praxisnaher Systeme stößt man aber meist auf nichtlineare Differentialgleichungssysteme, bei deren Lösung der Analogrechner, wie schon im vorangegangenen Abschnitt, ein angemessenes Arbeitsfeld findet.

2.1 Zwei-Massen-System mit nichtlinearem Dämpfer

Das in Bild 13 dargestellte System aus zwei federnd gelagerten Massen findet praktisch bei allen Fahrzeugen seine technische Realisierung. Jede Achse

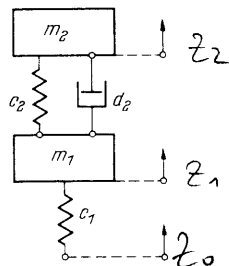


Bild 13. Zwei-Massen-System

eines Fahrzeugs, auf dessen Räder gleichzeitig eine Schwingungsanregung durch z_0 wirkt (z. B. Schienenstöße), so daß sich Rad und Rahmen senk-

recht verschieben, kann durch dieses ebene Ersatzmodell nachgebildet werden. Bei der Radfederung eines Automobils würde den Systemkonstanten folgendes entsprechen:

- m_1 Masse der Radaufhängung und Räder
- m_2 halbe Aufbaumasse
- c_1 Federkonstante der Reifen
- c_2 Federkonstante der Achsfederung
- d_2 Dämpfungskonstante der Stoßdämpfer

Wenn die Koordinaten z_i jeweils auf die Ruhelage ihrer Massen m_i als Nullpunkt bezogen werden, so lauten die Bewegungsgleichungen des Systems

$$m_1 \ddot{z}_1 = -d_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - c_2(z_1 - z_2) - c_1(z_1 - z_0)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -d_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - c_2(z_2 - z_1)$$

Sprungförmige Störungen $z_0 = z_{0m}$ und periodische Störungen $z_0 = z_{0m} \sin \omega t$ sollen das System erregen.

Wir wollen folgende Systemwerte für die Normierung annehmen

$$m_1 = 4 \text{ kps}^2/\text{m} \quad c_1 = 32000 \text{ kp/m}$$

$$m_2 = 50 \text{ kps}^2/\text{m} \quad c_2 = 8000 \text{ kp/m}$$

$$d_2 = 100 \text{ kps/m für } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) < 0$$

$$= 10 \text{ kps/m für } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) > 0 \quad z_{0m} = 0,02 \text{ m.}$$

Das nichtlineare Dämpfungsglied trägt dem Verhalten eines realen Stoßdämpfers Rechnung, der bei entspannender Feder wesentlich stärker dämpft. Eine Normierung von d_2 entsprechend

$$d_2 = D \cdot 100 \text{ kps/m} \quad D = \begin{cases} 1 & \text{für } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) < 0 \\ 0,1 & \text{für } (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) > 0 \end{cases} \quad (15)$$

ist empfehlenswert.

Mit den Systemkonstanten erhalten wir folgende Gleichungen

$$\ddot{z}_1 = -25s^{-1} D(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - 2000s^{-2}(z_1 - z_2) - 8000s^{-2}(z_1 - z_0)$$

$$\ddot{z}_2 = -2s^{-1} D(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - 160s^{-2}(z_2 - z_1). \quad (16)$$

Führen wir eine Normierung des Differentialgleichungssystems durch.

Für die Eigenfrequenz des 1. Teilsystems $\omega_{01} = \sqrt{2000 + 8000} \text{ s}^{-1} = 100 \text{ s}^{-1}$ erhalten wir den größeren Wert und setzen deshalb

$$\tau = \lambda t, \text{ mit } \lambda = 100 \text{ s}^{-1} \quad (17)$$

um die Zeitnormierung durchzuführen.

Für die Maximalwerte ist zu berücksichtigen, daß die höheren Amplituden bei periodischer Störung auftreten, so daß wir nach folgenden Formeln abschätzen

$$z_m = \frac{\omega_0}{\delta} z_{0m} \quad \dot{z}_m = \omega_0 z_m \quad (18)$$

Aus Gleichung (16) entnehmen wir die notwendigen Werte für ω_{0i} und δ_i und errechnen

$$z_{1m} = \frac{\omega_{01}}{\delta_1} z_{0m} = \frac{100 \text{ s}^{-1}}{25 \text{ s}^{-1}} z_{0m} = 4 z_{0m}$$

$$\dot{z}_{1m} = \omega_{01} z_{1m} = 400 \text{ s}^{-1} z_{0m} \text{ bzw. } z'_{1m} = 4 z_{0m}$$

und für das zweite Teilsystem

$$z_{2m} \approx 6 z_{0m}$$

$$\dot{z}_{2m} \approx 70 \text{ s}^{-1} z_{0m} \quad z'_{2m} \approx 0,7 z_{0m}$$

Es ist nun zunächst nicht sinnvoll, genau mit den so geschätzten Maximalwerten zu normieren. Es würde zu vielen unterschiedlichen Faktoren führen und entsprechend viele Potentiometer in der Schaltung verlangen. Außerdem kann die Wirkung des nichtlinearen Glieds, das diese Faktoren beeinflusst, noch nicht übersehen werden. Schließlich können Änderungen der Maximalwerte von einzelnen Variablen auch noch in der Schaltung vorgenommen werden, was häufig schneller zur optimalen Lösung führt. Wir wollen darauf noch zurückkommen.

Bis auf z'_{2m} liegen alle Abschätzungsfaktoren in der Nähe von 6. Um möglichst viele gleiche Maximalwerte zu erhalten, sollte deshalb gewählt werden:

$$z_{1m} = z'_{1m} = z_{2m} = q z_{0m}, \quad z'_{2m} = 0,1 q z_{0m} \quad (19)$$

$$\text{mit } q = 6.$$

Hiermit ergeben sich aus Gleichung (16) durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{z'_{im}}$ die normierten Gleichungen

$$(z'_1)' = -0,25D(z'_1 - 0,1 z'_2) - 0,2(z_1 - z_2) - 0,8(z_1 - \frac{1}{q} z_0)$$

$$(z'_2)' = -0,02D(z'_2 - 10 z'_1) - 0,16(z_2 - z_1).$$

Um die Klammerausdrücke, die ja von einem Rechenelement gebildet werden müssen, in beiden Gleichungen anzugleichen, formen wir noch wie folgt um

$$(z'_1)' = -0,25D(z'_1 - 0,1 z'_2) - 0,2(z_1 - z_2) - 0,8(z_1 - \frac{1}{q} z_0)$$

$$(z'_2)' = -0,2D(z'_1 - 0,1 z'_2) - 0,16(z_1 - z_2). \quad (20)$$

Die auf normierte Größen umgeschriebene Beziehung für D, siehe Gleichung (15), lautet schließlich

$$D = \begin{cases} 1 & (z'_1 - 0,1 z'_2) < 0 \\ 0,1 & (z'_1 - 0,1 z'_2) > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Beim Aufstellen der Rechenschaltung in Bild 14 aus den beiden letzten Gleichungen bewährt es sich, zunächst die beiden Integriererketten unter Berücksichtigung der Faktoren $\frac{z'_{im}}{z_m}$ zu bilden. Die Variablen z_0 , z_1 und z_2 sind mit alternierenden Vorzeichen gewählt, um ohne weitere Verstärker die auftretenden Differenzenausdrücke zu erhalten.

Eine spezielle Schaltung für das nichtlineare Dämpfungsglied $D(z'_1 - 0,1 z'_2)$ ist mit Übertragungskennlinien in Bild 15 gezeigt. Bei positiver oder negativer Aussteuerung des ersten Verstärkers wird jeweils eine der Dioden leitend und bil-

det einen Rückföhrungszweig mit Wertigkeit 1 oder 0,1. Der Nachfolgeverstärker addiert die positiven und negativen Bereiche der Kennlinie und berücksichtigt durch die Art der Ankopplung die Schleusenspannung der Dioden. Mit derartigen Beschaltungen eines offenen Verstärkers lassen sich viele

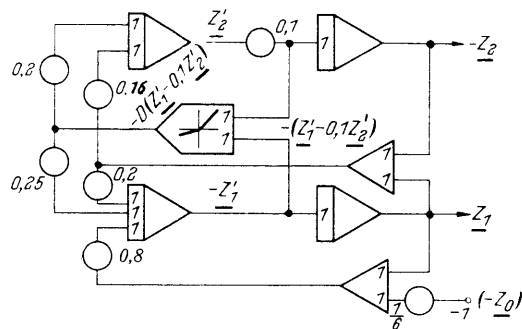


Bild 14. Rechenschaltung des Zwei-Massen-Systems

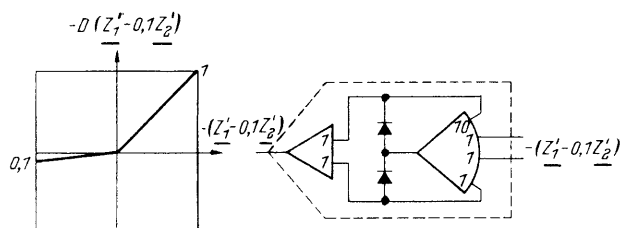


Bild 15. Nichtlinearer Dämpfer

nichtlineare Glieder nachbilden, insbesondere Funktionen großer Steilheit, für die ein Funktionsgeber bisheriger Art unzureichend ist.

Die folgenden Bilder zeigen einige charakteristische Diagramme des zweiläufigen Schwingers. Der Antwort auf eine Spannungsfunktion $z_0 = z_{0m}$

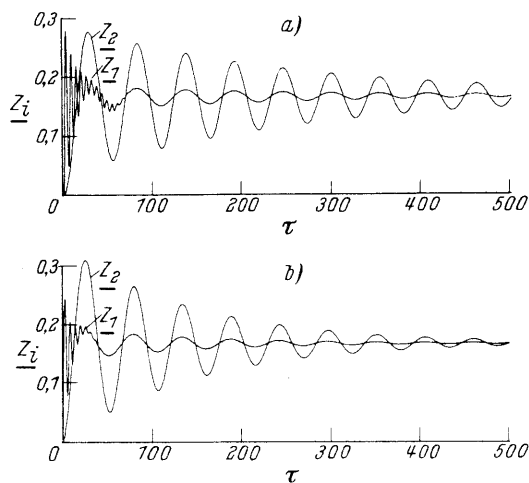


Bild 16. Übergangsfunktion des Zwei-Massen-Schwingers

a) mit nichtlinearem Dämpfer

b) mit geschwindigkeitsproportionalem Dämpfer

(Übergangsfunktionen in Bild 16) für den nichtlinearen Dämpfer und für einen Dämpfer mit $D = 1$ ist zu entnehmen, daß zwar im nichtlinearen Fall die

Schwingzeit der Masse m_2 länger ist (geringere Gesamtdämpfung), dafür aber der primäre Stoß zu einer geringeren Amplitude führt.

Mit einer periodischen Störung $z_0 = z_{0m} \sin \frac{\omega}{\lambda} \tau$, dessen Frequenz $\frac{\omega}{\lambda}$ von 0,1 bis 1,5 in $\tau = 300$ verändert wird, ergeben sich die Frequenzgänge der Massen m_1 und m_2 in Bild 17. Sie lassen die Resonanzstellen des Systems erkennen.

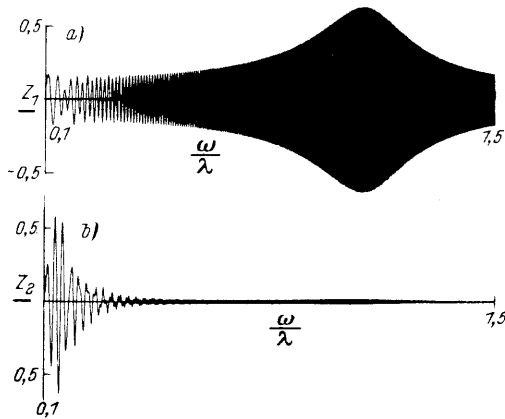


Bild 17. Frequenzgang des Zwei-Massen-Systems
a) für Masse m_1 b) für Masse m_2

Der Einschwingvorgang bei diesen Resonanzfrequenzen ist in den Phasendiagrammen (Bild 18) beider Massen gezeigt. Hiernach ist die Abschätzung von z_{2m} und z'_{2m} recht gut gewesen. z_{1m} und z'_{1m} hätten etwa $2/3$ kleiner gewählt werden können.

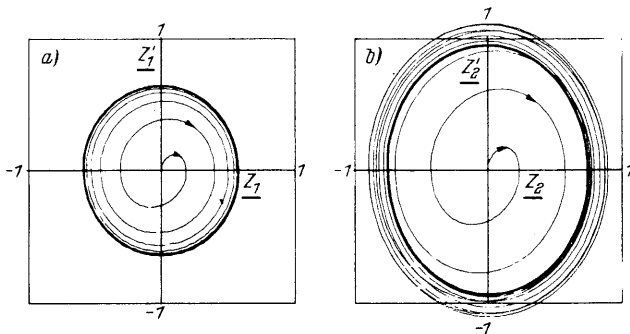


Bild 18. Phasendiagramme des Zwei-Massen-Systems
a) für Masse m_1 , b) für Masse m_2

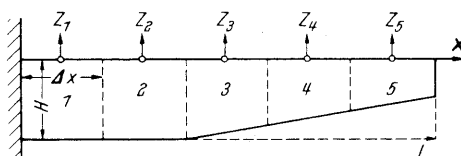


Bild 19. Aufteilung eines Trägers in 5 Segmente

Änderungen der Maximalwerte sind auch ohne erneutes Aufstellen der Maschinengleichungen in der Schaltung möglich. Soll z. B. eine Größe z am Ausgang eines Integrierers um den Faktor c verbessert werden, so sind alle Eingangswerte des Integrierers, d. h. alle Potentiometer, mit dem Fak-

tor c und alle vom Ausgang abgenommenen Werte mit $1/c$ zu multiplizieren. Der neue Wert für z_m ist nun

$$z_m(\text{neu}) = \frac{1}{c} z_m(\text{alt})$$

Derartige Schaltungskorrekturen werden häufig für umfangreiche Systeme, insbesondere bei sehr nichtlinearen Gliedern erforderlich sein. Eine spezielle Durchführung an diesem Beispiel sei dem Leser überlassen.

3. Schwingungen kontinuierlicher Systeme

Schwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden sind durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu beschreiben. Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (kontinuierliche Systeme) haben aber mindestens zwei unabhängige Variable, z. B. eine Ortskoordinate und die Zeit, und führen so auf partielle Differentialgleichungen. Da der Analogrechner nur eine einzige unabhängige Variable (τ) besitzt, ist eine unmittelbare Nachbildung kontinuierlicher Systeme nicht möglich.

Auf folgenden beiden Umwegen gelingt es in vielen Fällen, trotzdem eine Lösung zu finden.

a) Die Lösungsfunktion mancher Systeme läßt sich als Produkt von Funktionen jeweils einer Variablen ausdrücken, z. B. Ortsfunktion \cdot Zeitfunktion. Durch Trennung der Variablen ist das System dann auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit Randbedingungen zurückzuführen. Es entstehen so Eigenwertaufgaben, die mit Analogrechnern zu behandeln sind. Dieses Separationsverfahren scheidet allerdings bei nichtlinearen Systemen.

b) Von den unabhängigen Variablen setzt man eine - meist die Zeit - der Maschinenvariablen gleich. Für die übrigen Variablen betrachtet man die Lösungsfunktion nur an festgesetzten, diskreten Stellen. Die partiellen Ableitungen nach den so quantisierten Variablen werden durch Differenzenquotienten angenähert (Differenzenverfahren). An jeder der betrachteten Stellen kann nun die Zeitfunktion als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erhalten werden. Die partielle Differentialgleichung löst sich so in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf. Dieses Verfahren ist auch für nichtlineare kontinuierliche Schwinger anwendbar und nur durch die Zahl der Rechenelemente des verwendeten Analogrechners begrenzt, der nun alle "Teilsysteme" gleichzeitig lösen muß.

3.1 Schwingungen eines vorspringenden Trägers

An dem in Bild 19 gezeigten Träger der Länge L sollen Vibrationsuntersuchungen in z -Richtung durchgeführt werden. Die Bewegungsgleichung lautet für kleine Auslenkungen wie folgt:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \text{ mit } M = EJ(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (22)$$

Die Zeit t und die Längenkoordinate x (von der Einspannstelle des Trägers aus gerechnet) sind die beiden unabhängigen Variablen des Systems. Das Biegemoment M ist durch ein x -abhängiges Flächenträgheitsmoment $J(x)$ gekennzeichnet, das sich aus der verjüngenden Form des Trägers ergibt. E ist der Elastizitätsmodul. Schließlich ist durch eine variable Flächenlast $q(x)$ (Masse je Länge) die Massenverteilung im Träger berücksichtigt.

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung sind Randwerte (örtlich) und Anfangsbedingungen (zeitlich) erforderlich. Wenn keine Momente und keine Scherkräfte $\frac{\partial M}{\partial x}$ vorliegen, lauten die Rand-

werte an der Einspannstelle ($x = 0$) und am Trägerende ($x = L$)

$$\begin{aligned} x = 0: \quad z(t) = 0, \quad \frac{\partial z(t)}{\partial x} = 0 \\ x = L: \quad M(t) = 0, \quad \frac{\partial M(t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Die Anfangsbedingungen ($t = 0$) ergeben sich bei einer vorgegebenen Auslenkung des Trägers, $z=f(x)$, zu

$$t = 0: \quad z(x) = f(x) \quad \frac{\partial z(x)}{\partial t} = 0 \quad (24)$$

Zur Lösung dieses Schwingungssystems nach der Differenzenmethode wird die Problemzeit t durch $\tau = \lambda t$ der MaschinenvARIABLE τ zugeordnet. Die andere unabhängige Variable x muß dann quantisiert werden, was hier durch Teilung des Trägers in 5 Segmente jeweils der Länge $\Delta x = L/5$ erreicht wird. Es werden demnach nur die Auslenkungen z_1, z_2, \dots, z_5 der einzelnen Abschnitte betrachtet. Um die Aufgabe auch mit kleineren Analogrechnern behandeln zu können, wird auf eine feinere Unterteilung verzichtet.

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung nach x können an der Stelle " i " wie folgt in Differenzenquotienten umgewandelt werden

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (25)$$

Hiermit schreiben sich die beiden partiellen Differentialgleichungen (22)

$$\begin{aligned} \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{(\Delta x)^2} + q_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0 \\ M_i = EJ_i \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad i: 1, 2, \dots, 5 \end{aligned} \quad (26)$$

Das Ergebnis ist somit ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Die Randwerte, Gleichungen (23),

$$z_i = 0 \text{ und } \frac{\partial z_i}{\partial x} = 0 \text{ für } i = \frac{1}{2}$$

sind nur mit $z_1 = 0$

$$M_i = 0 \text{ und } \frac{\partial M_i}{\partial x} = 0 \text{ für } i = 5 \frac{1}{2}$$

mit $M_5 = 0$ zu erfüllen.

Beziehen wir schließlich die Koordinaten z_i auf die Ruhelage des Trägers, so folgt aus den Anfangsbedingungen mit $f(t=0) = 0$

$$z_i(t=0) = 0, \quad \frac{dz_i(t=0)}{dt} = 0$$

Nehmen wir für die Rechnung folgende Systemwerte an

Trägerlänge $L = 5 \text{ m}$

Trägerhöhe H , nimmt ab $x = 2 \text{ m}$ gleichmäßig auf $H/2$ ab

Elastizitätsmodul $E = 575 \cdot 10^3 \text{ kp/cm}^2$

Flächenträgheitsmoment $J = 4000 \text{ cm}^4$, nimmt von $x = 2 \text{ m}$ mit H^3 auf 500 cm^4 ab.

Flächenlast $q = 200 \text{ kg/m}$, nimmt von $x = 2 \text{ m}$ linear bis 100 kg/m ab.

Hiermit errechnen sich die Werte (nur die nachfolgend notwendigen)

$$J_1 = 4000 \text{ cm}^4 \quad q_2 = 200 \text{ kg/m}$$

$$J_2 = 4000 \text{ cm}^4 \quad q_3 = 183 \text{ kg/m}$$

$$J_3 = 3080 \text{ cm}^4 \quad q_4 = 150 \text{ kg/m}$$

$$J_4 = 1780 \text{ cm}^4 \quad q_5 = 116,7 \text{ kg/m}$$

Führen wir zunächst folgende Normierungswerte ein:

$$\begin{aligned} J_i = J_{\max} \cdot j_i \quad J_{\max} = 4000 \text{ cm}^4 \\ q_i = q_{\min} \cdot \frac{1}{l_i} \quad q_{\min} = 100 \text{ kg/m} \end{aligned} \quad (27)$$

so erhält man für die Zahlenwerte von j_i und l_i

$$\begin{aligned} j_1 = 1 \quad l_2 = 0,5 \\ j_2 = 1 \quad l_3 = 0,545 \\ j_3 = 0,770 \quad l_4 = 0,667 \\ j_4 = 0,420 \quad l_5 = 0,855 \end{aligned}$$

Mit $\tau = \lambda t$ und Gleichung (27) folgt aus Gleichung (26)

$$\begin{aligned} z_i'' = \frac{E J_{\max}}{q_{\min} (\Delta x)^4 \lambda^2} l_i (-m_{i-1} + 2m_i - m_{i+1}) \\ \text{mit } m_i = j_i (z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) \quad (28) \\ i = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Um die Gleichung möglichst zu vereinfachen, wird

$$\lambda^2 = \frac{E J_{\max}}{q_{\min} (\Delta x)^4}$$

gesetzt, mit den Systemwerten errechnet man $\lambda = 150 \text{ s}^{-1}$.

Um einen unmittelbaren Vergleich aller z_i zu haben, setzen wir alle z_{im} und z'_{im} gleich und können so auf eine Amplitudennormierung verzichten.

Somit lauten die einzelnen zu simulierenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
 z_2'' &= 0,5 (-m_1 + 2 m_2 - m_3) \\
 -z_3'' &= 0,545 (m_2 - 2 m_3 + m_4) \\
 z_4'' &= 0,667 (-m_3 + 2 m_4) \\
 -z_5'' &= 0,855 (+ m_4)
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

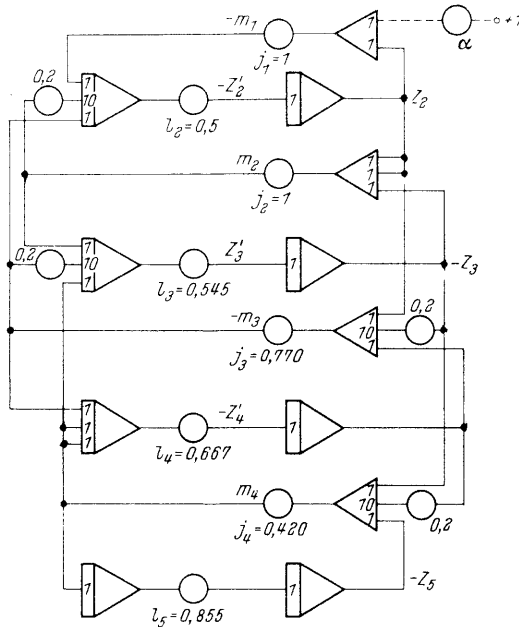


Bild 20. Rechenschaltung des schwingenden Trägers

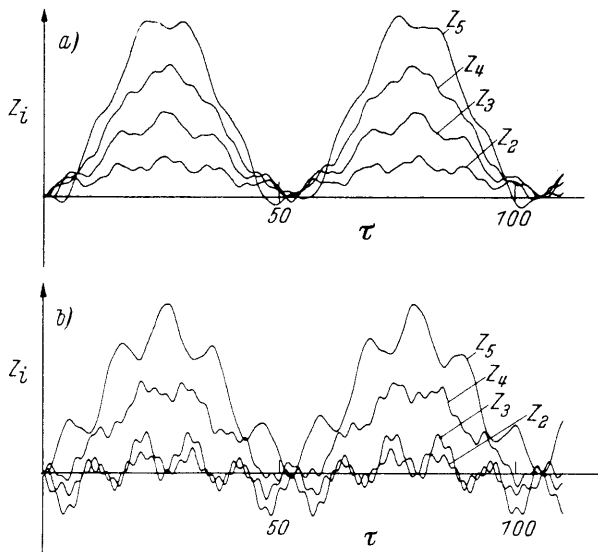


Bild 21. Schwingungen des Trägers bei sprungförmiger Erregung durch ein Moment am Segment 1 (Bild a) und am Segment 3 (Bild b)

mit

$$\begin{aligned}
 m_1 &= j_1 z_2 \\
 -m_2 &= j_2 (2 z_2 - z_3) \\
 m_3 &= j_3 (z_2 - 2 z_3 + z_4) \\
 -m_4 &= j_4 (-z_3 + 2 z_4 - z_5)
 \end{aligned}$$

Sie sind mit alternierendem Vorzeichen aufgeführt, um die Rechenschaltung in Bild 20 möglichst einfach bilden zu können.

Aus der Vielzahl der Untersuchungen an einem solchen System sei die Erregung der Trägerschwingung durch eine Sprungfunktion gezeigt, die mit Potentiometer α in der Schaltung, z.B. auf m_1 , wirksam wird und so einem sprungförmigen Moment dem Trägersegment "1" entspricht. In Bild 21 ist die Schwingung des Trägers durch Aufzeichnung der 4 Auslenkungen z_2, \dots, z_5 wiedergegeben. Während bei Erregung am 1. Abschnitt vor allem die Grundschiwingung des Trägers angeregt wird, läßt ein Sprungmoment am 3. Segment bereits deutliche Anteile an Oberschwingungen erkennen.

Das Beispiel zeigt, daß ein kontinuierliches System bei der Lösung am Analogrechner letztlich durch endlich viele Einzelsysteme angenähert wird. Die Zahl der Segmente bestimmt die Genauigkeit der Simulation. Eine bessere Unterteilung in z.B. 10 Segmente hätte einen Elementenumfang von $9 \cdot 3 = 27$ Rechenverstärkern benötigt.

Die Grenzen des Analogrechners sind aber schnell erreicht, wenn das System außer der Zeit noch zwei unabhängige Variable x und y hat. Der Elementbedarf steigt quadratisch mit der Zahl der Quantisierungsschritte. Bei $10 \cdot 10 = 100$ Stützstellen der Lösungsfunktion benötigt man etwa 300 Rechenverstärker, so daß derartige Probleme mit anderen Rechenmethoden behandelt werden sollten.

Literatur

- [1] Korn, G.A., u. Korn, T.M.: Electronic analog computers. 2. Aufl. McGraw-Hill, New York 1956
- [2] Jackson, A.S.: Analog computation. McGraw-Hill, New York 1960
- [3] Rogers, A.E., u. Connolly, T.W.: Analog computation in engineering design. McGraw-Hill, New York 1960
- [4] Winkler, H.: Elektronische Analogieanlagen. Akademie-Verlag, Berlin 1961
- [5] Giloi, W., u. Lauber, R.: Analogrechner. Springer Verlag, Berlin 1963
- [6] Wass, C.A.A. u. Garner, K.G.: Introduction to Electronic Analogue Computers. Pergamon Press, Oxford 1965
- [7] Mahrenholtz, O.: Analogrechnen in Maschinenbau und Mechanik. Bibliogr. Institut, Mannheim 1968